Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 18.01.17
Gesamtpunktzahl: 15+2*

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2016/2017

Übungen zur Maßtheorie: Blatt 11

There should be no such thing as boring mathematics.

— Edsger W. Dijkstra (1930–2002)

1. (a) Konstruiere analog zur Cantormenge eine kompakte Menge $K \subset [0,1]$ ohne isolierte Punkte mit leerem Inneren und $0 < \lambda(K) < 1$. (2)

(b) Sei K wie im vorigen Aufgabenteil und $E \subset \mathscr{B}([0,1])$ beliebig mit $\lambda(E) = 0$. Zeige, dass $h\colon [0,1] \setminus E \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) = \mathbb{1}_K(x)$ nicht stetig ist. (2)

Bemerkung: Das $\varepsilon > 0$ in Aufgabe 5 (b) auf Blatt 10 ist also wesentlich.

2. Für $p \in [1,\infty]$ bezeichnen wir mit ℓ^p den Banachraum $L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \zeta)$ mit dem Zählmaß ζ auf $\mathbb{N}$. Der Einfachheit halber sei hier stets $p, q \in [1,\infty)$ mit $p < q$.

(a) Zeige, dass (2)

$$\ell^p = \Big\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathbb{K} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \Big\}$$

und $\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$ für alle $(x_n) \in \ell^p$.

(b) Zeige, dass $\ell^p \subset \ell^q$ und $\|x\|_q \le \|x\|_p$ für alle $x \in \ell^p$ gilt. (2)

3. Seien $p, q \in [1,\infty]$ mit $p < q$ und (Ω, Σ, μ) ein Maßraum.

(a) Sei $\mu(\Omega) < \infty$. Zeige, dass dann $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ gilt und ein $C > 0$ existiert mit $\|f\|_p \le C\|f\|_q$ für alle $f \in L^q(\Omega)$. (2)

(b) Sei $\theta \in (0,1)$ und $r \in [1,\infty]$ mit $\frac{1}{r} = (1-\theta)\frac{1}{p} + \theta\frac{1}{q}$. Hierbei ist $\frac{1}{\infty}$ stets als 0 zu verstehen. Sei $f \in \mathcal{L}^p(\Omega) \cap \mathcal{L}^q(\Omega)$. Zeige $f \in \mathcal{L}^r(\Omega)$ und (4)

$$\|f\|_r \le \|f\|_p^{1-\theta} \|f\|_q^{\theta}.$$

(c) Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$ messbar. Zeige, es gibt ein Intervall $I_f \subset [1,\infty]$ derart, dass $f \in \mathcal{L}^r(\Omega)$ genau dann gilt, wenn $r \in I_f$. (1)

(d) Es sei $(\Omega, \Sigma, \mu) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Gib ein Beispiel einer messbaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $I_f = [3,7)$. (2*)