Universität Ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter

Abgabe: Mittwoch, 01.02.17
Gesamtpunktzahl: 15

Wintersemester 2016/2017

Übungen zur Maßtheorie: Blatt 13

Das aber solche maler wolgefallen in jren yrthumben gehabt / ist alleyn vrsach gewest / das sie die kunst der messung nit gelernet haben / an die keyn rechter werckmann werden oder seyn kan / Das aber jr meyster schuld gewest die solche kunst selbs nit gekuendt haben / Die weyl aber die der recht grundt ist aller mallerey / hab jch mir fuergenomen allen kuenstbegyrigen jungen / eyn anfang zuostellen / vnd vrsach zuegeben damit sie sich der messunge zirckels vnd richtscheyt / vnderwinden vnnd darauß die rechten warheyt erkennen vnnd vor augen sehen moegen / damit sie nit alleyn zuo kuensten begirig werden / sonder auch zu eynem rechten vnd groesseren verstant komen moegen

— Albrecht Dürer (1471–1528)

1. (a) Seien (Ω, Σ, μ) und (Ω, Σ, ν) zwei endliche Maßräume mit $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$. Zeige, dass (2)

$$\mathcal{D} := \{A \in \Sigma : \mu(A) = \nu(A)\}$$

ein Dynkin-System ist.

(b) Gib ein Beispiel eines Dynkin-Systems, welches keine σ-Algebra ist. (2)

(c) Gib ein Beispiel zweier verschiedener Wahrscheinlichkeitsmaße auf einer σ-Algebra Σ mit Erzeuger $\mathcal{E} \subset \Sigma$, welche auf allen Mengen in $\mathcal{E}$ übereinstimmen. (2)

2. (a) Es sei (3)

$$R := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ Riemann integrierbar}\}.$$

Zeige: R ist dicht aber nicht abgeschlossen in $L^1([0,1], \widetilde{\mathscr{B}}([0,1]), \tilde{\lambda})$. In welchem Sinn ist hier $R \subset L^1([0,1], \widetilde{\mathscr{B}}([0,1]), \tilde{\lambda})$ zu verstehen?

Bemerkung: Dicht heißt, dass der Abschluss von R in $L^1([0,1])$ ganz $L^1([0,1])$ ist.

(b) Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue messbar und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel messbar. Zeige: Im Allgemeinen ist nur eine von den beiden Funktionen $g \circ f$ und $f \circ g$ Lebesgue messbar. (2)

Hinweis: Hierbei heißt $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue messbar, wenn $h^{-1}(A) \in \widetilde{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$ für alle $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Für das Gegenbeispiel, verwende Aufgabe 3 (b) von Blatt 5.

3. Es sei $1 \le p < \infty$ und (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Zudem seien $f_n, f \in L^p(\Omega)$ und $g_n, g \in L^{p'}(\Omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $L^p(\Omega)$ und $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ in $L^{p'}(\Omega)$. Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} f_n g_n = fg$ in $L^1(\Omega)$ gilt. (4)

Bemerkung: Für $p = 1$ gilt $p' = \infty$.