Universität Ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter

Abgabe: Mittwoch, 08.02.17
Gesamtpunktzahl: 15+2*

Wintersemester 2016/2017

Übungen zur Maßtheorie: Blatt 14

I know of scarcely anything so apt to impress the imagination as the wonderful form of cosmic order expressed by the "Law of Frequency of Error." The law would have been personified by the Greeks and deified, if they had known of it. It reigns with serenity and in complete self-effacement, amidst the wildest confusion. The huger the mob, and the greater the apparent anarchy, the more perfect is its sway. It is the supreme law of Unreason.

— Francis Galton (1822-1911)

1. Betrachte die Maßräume $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \zeta)$ und $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Bestimme $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$ und $\zeta \otimes \lambda$. (2)

2. (a) Seien $(\Omega_j, \Sigma_j, \mu_j)$ für $j \in \{1,2,3\}$ drei σ-endliche Maßräume. Zeige, dass $\Sigma_1 \otimes (\Sigma_2 \otimes \Sigma_3) = (\Sigma_1 \otimes \Sigma_2) \otimes \Sigma_3 = \sigma(\{A \times B \times C : A \in \Sigma_1, B \in \Sigma_2, C \in \Sigma_3\})$ und $\mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3) = (\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3$. (3)

Bemerkung: Wir identifizieren $\Omega_1 \times (\Omega_2 \times \Omega_3)$ und $(\Omega_1 \times \Omega_2) \times \Omega_3$ mit $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ bezeichne λ_n das n-dimensionale Lebesguemaß in $\mathbb{R}^n$. Seien $d, k \in \mathbb{N}$ mit $k < d$. Zeige, dass $\lambda_d = \lambda_{d-k} \otimes \lambda_k$ und $\lambda_d = \lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_1$ (d-Mal). (2)

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\tilde{\lambda}_n$ das vervollständigte n-dimensionale Lebesguemaß in $\mathbb{R}^n$. Sei $d \in \mathbb{N}$ mit $d > 1$. Zeige oder widerlege: $\tilde{\lambda}_d$ ist identisch zum d-fachen Produkt $\tilde{\lambda}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{\lambda}_1$. (2*)

3. (a) Seien $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu)$ und $(\Omega_2, \Sigma_2, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume. Sei $A \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$. Zeige: $(\mu \otimes \nu)(A) = 0$ genau dann, wenn $\nu(A_x) = 0$ für μ-fast alle $x \in \Omega_1$. (2)

(b) Gib ein Beispiel einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derart, dass f nicht Borel messbar ist, aber $f(x, \cdot), f(\cdot, y)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel messbar sind für alle $x, y \in \mathbb{R}$. (2)

4. Sei (Ω, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum und $f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ für ein $p \in [1, \infty)$. Zeige: (4)

$$\|f\|_p^p = p \int_{[0,\infty)} \alpha^{p-1} \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \alpha\}) \, \mathrm{d}\lambda(\alpha).$$