UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Donnerstag, 26.10.17
Gesamtpunktzahl: 10

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Analysis 1: Blatt 1

Bitte melden Sie sich in Moodle zur Vorlesung an! In Moodle erfolgt die Kolloquiumseinteilung und die Verwaltung der Übungspunkte.

Wichtige Information zu den Kolloquien:

Geben Sie in Moodle bis zum Freitag, den 20.10. Ihre Präferenzen zu den Kolloquiumsterminen ab. Das ist eine Voraussetzung dafür, dass Sie einem Kolloquium zugeteilt werden können. Kontrollieren Sie bitte, dass Ihre Präferenzen bei Schritt 3 korrekt gespeichert wurden. Sie können bei „Ihre Bewertung" sehen, was gespeichert wurde. Dort sollte nirgends „nicht bewertet" stehen.
Die Zuteilung und die Information darüber erfolgt am Wochenende. Die Kolloquien finden ab der zweiten Semesterwoche statt. Ab Dienstag, den 24.10. werden Übungspunkte für die Kolloquien vergeben. Für die Kolloquien von Montag bis Mittwoch ist die Vorlesung bis zur Vorwoche maßgeblich, ab Donnerstag sind die Vorlesungen der aktuellen Woche eingeschlossen.

Zum Übungsbetrieb:

Die Übungsaufgaben hier auf der ersten Seite sind schriftlich zu bearbeiten und am Anfang der nächsten Übungsveranstaltung abzugeben. In der Übungsveranstaltung werden dazu anschließend Lösungen präsentiert. Sie erhalten die korrigierten und bewerteten Abgaben in der darauffolgenden Woche wieder zurück.
Geben Sie Ihre schriftlichen Lösungen einzeln ab. Die abgegebenen Blätter müssen ordentlich geheftet (Tacker!) und leserlich mit Namen versehen sein (Schreibung wie in Moodle).
Auf der Rückseite gibt es zusätzliche Übungsaufgaben. Diese sind ebenfalls wichtig und eine gute Vorbereitung für die schriftlich abzugebenden Übungsaufgaben auf der Vorderseite. Hilfe und Tipps dazu gibt es insbesondere im wöchentlichen MathLab.

Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben:

1. (a) Seien A und B Aussagen. Zeige, dass $A \vee (\neg(A \wedge B))$ immer wahr ist, unabhängig vom Wahrheitsgehalt von A und B. (1)

(b) Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Negiere die folgende Aussage (schreibe ohne $\neg$): (1)

$$\forall M \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \implies f(n) > M)$$

(c) Seien X, Y und Z Mengen. Zeige (2)

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z).$$

2. Es seien X, Y nichleere Mengen, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $B_1, B_2 \subset Y$.

(a) Zeige $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. (1)

(b) Zeige $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. (1)

(c) Zeige $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$. (1)

3. Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (3)

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Weitere Aufgaben zur Übung

4. In dieser Aufgabe geht es um den Nachweis der De Morgan'schen Regeln.

(a) Seien A und B Aussagen. Zeige die Äquivalenz $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$.

(b) Seien A und B zwei Teilmengen einer Grundmenge X. Zeige, dass $(A \cup B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cap B^{\mathrm{c}}$.

(c) Gilt im vorigen Aufgabenteil die Aussage auch, wenn man darin $\cup$ und $\cap$ tauscht?

5. Seien N und M Mengen. Beweise die Äquivalenz

$$N \subset M \Leftrightarrow N \cap M = N.$$

6. Es seien X, Y nichleere Mengen, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $A_1, A_2 \subset X$.

(a) Zeige $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(b) Zeige $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. Gib ein Beispiel an, bei dem keine Gleichheit vorliegt.

7. Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

8. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeige mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(b-a) \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = b^{n+1} - a^{n+1}$$

gilt.