Universität Ulm

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Manfred Sauter

Wintersemester 2017/2018

Abgabe: Donnerstag, 21.12.17
Gesamtpunktzahl: 10

Übungen zur Analysis 1: Blatt 8

Wie üblich sind die Aufgaben auf der Vorderseite schriftlich zur Korrektur abzugeben und die Aufgaben auf der Rückseite sind zusätzliche Übungsaufgaben. Die Aufgaben auf der Rückseite sind ebenfalls wichtig und eine gute Vorbereitung für die schriftlich abzugebenden Übungsaufgaben. Hilfe und Tipps dazu gibt es insbesondere im wöchentlichen MathLab.

Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben:

1. Bestimme die Konvergenzradien folgender Potenzreihen: (4×0,5)

(a) $\sum_{k=0}^{\infty}(k^5+1)z^k$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty}(3-\frac{5}{k^2})^k z^k$

(c) $\sum_{k=0}^{\infty}\Big(1+\frac{(-1)^k}{k}\Big)^{k^2} z^k$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2+(-1)^k)^{3k}} z^{2k}$

2. Zeige die folgenden Aussagen für die beiden Potenzreihen

$$\sinh(z) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{und} \quad \cosh(z) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

(a) Beide Reihen konvergieren für alle $z \in \mathbb{C}$. (0,5)

(b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $2\sinh(z) = \exp(z) - \exp(-z)$ und $2\cosh(z) = \exp(z) + \exp(-z)$. (1)

(c) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $(\cosh(z))^2 - (\sinh(z))^2 = 1$. (0,5)

(d) Es gilt mit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch (1)

$$f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$

dass $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

3. Betrachte die Funktionen $f\colon D \to \mathbb{C}$ und bestimme folgende Grenzwerte im Fall ihrer Existenz:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $f(x) = \dfrac{\exp(ix)}{x^{42}}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (1)

(b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ mit $D = (-1,1) \setminus \{0\}$ (1)

(c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x+1}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (1)

(d) $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$, $f(z) = \dfrac{\exp(z)-1}{z}$ mit $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (1)

4. Bestimme das Cauchy-Produkt der konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{k+42}-\sqrt{k})$ mit sich selbst und zeige, dass dieses nicht konvergiert. (1)

Weitere Aufgaben zur Übung

5. Zeige: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt die Identität

$$\sin z + \sin w = 2 \sin \frac{z+w}{2} \cos \frac{z-w}{2}.$$

6. Wir sind im Kontext von Aufgabe 2 auf der Vorderseite. Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \cosh(x) = \lim_{x\to-\infty} \cosh(x) = \infty$$

und

$$\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = - \lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = \infty.$$

Hierbei sind die Funktionsgrenzwerte allesamt auf $\mathbb{R}$ zu betrachten.

7. Bestimme die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^{42}} z^k$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k = \begin{cases} 2^{k/2} & k \text{ gerade} \\ 0 & k \text{ ungerade} \end{cases}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{2k}$

(d) $z^2 + 5z + 3$

(e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{k+2})^k z^k$

(f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}} z^k$

8. Betrachte die Funktionen $f \colon D \to \mathbb{C}$ und bestimme folgende Grenzwerte im Fall ihrer Existenz:

(a) $\displaystyle\lim_{z\to 1+i} f(z)$, $f(z) = z^2 + 1$ mit $D = \mathbb{C}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oder $D = (0,1)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$, $f(x) = \frac{x^k - 1}{x-1}$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(d) $\displaystyle\lim_{z\to 2} f(z)$, $f(x) = \frac{z^2 + 5z - 14}{z-2}$ und $D = \mathbb{C} \setminus \{2\}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

9. Bestimme das (formale) Cauchy-Produkt der Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} k z^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ und bestimme den Konvergenzradius des Produkts.