UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Donnerstag, 13.12.18
Gesamtpunktzahl: 10

Prof. Dr. Emil Wiedemann
Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2018/2019

Übungen zur Analysis 1: Blatt 8

Vorbereitende und zusätzliche Aufgaben zur Übung

1. Sei $D = \{0\} \cup [1, 2]$. Zeige, dass dann jede Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in 0 ist, aber nicht stetig in 2 zu sein braucht.

2. Untersuche die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch

$$a_n := \sqrt{n^2 + 5n} - n^2$$

auf Konvergenz oder bestimmte Divergenz.

3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimme im Falle der Existenz die Funktionsgrenzwerte

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x + 1}$$

und

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

4. Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion gegeben durch

$$p(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$$

mit $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ wobei $N \in \mathbb{N}$ ungerade und $a_N \neq 0$ sei. Zeige, dass p surjektiv ist.

Bemerkung: Das zeigt insbesondere, dass jedes ungerade Polynom eine reelle Nullstelle hat.

Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben

Bei den Aufgaben wird immer auch eine Begründung durch ein schlüssiges und vollständiges Argument erwartet, sofern darauf nicht explizit verzichtet wird. In Ihrer Argumentation dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung und vorigen Übungsaufgaben verwenden, sollten aber immer einen genauen Verweis geben und in der Regel auch begründen, weshalb das Resultat anwendbar ist.
Die geklammerte Zahl auf dem Seitenrand gibt an, wieviele Übungspunkte auf die jeweilige Aufgabe oder den jeweiligen Aufgabenteil vergeben werden.

5. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (1,5)

$$1 \leq \sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Folgere, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Hinweis: Binomischer Lehrsatz

6. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch (1,5)

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{falls } x \leq 0 \\ x^2 - x + a & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Untersuche f auf Stetigkeit.

7. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2 - 4x - 3$. Zeige direkt mit der ε–δ Definition die Stetigkeit von f in 1. (1,5)

8. Sei $f\colon (-1,1) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch (1,5)

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}.$$

Untersuche, ob der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$ existiert und bestimme diesen gegebenenfalls.

9. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

(a) Zeige, dass dann die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(D) \to \mathbb{R}$ existiert und diese ebenfalls streng monoton wachsend ist. (0,5)

(b) Sei nun zudem $D = [0, \infty)$ und f stetig. Zeige, dass dann auch f^{-1} stetig ist. (3)

Bemerkung: Diese Aussage bleibt allgemeiner für beliebige Intervalle D richtig, auch ohne Stetigkeit von f.

(c) Sei $k \in \mathbb{N}$. Folgere, dass die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sqrt[k]{x}$ stetig ist. (0,5)