Prof. Dr. Emil Wiedemann
Dr. Manfred Sauter

Wintersemester 2018/2019

Übungen zur Analysis 1: Blatt 13

Vorbereitende und zusätzliche Aufgaben zur Übung

1. Sei $x \in [0,1)$ mit **periodischer** Dezimaldarstellung $x = \sum_{k=1}^{\infty} d_k 10^{-k}$, d.h. es existieren $k_0, l \in \mathbb{N}$ mit $d_j = d_{j+l}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $j \geq k_0$. Zeige $x \in \mathbb{Q}$.

2. Zeige: Wenn $x \in [0,1)$ zwei verschiedene Dezimaldarstellungen hat, dann sind die Dezimalstellen bei einer schließlich 0 und bei der anderen schließlich 9.

3. Untersuche folgende Reihen auf absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{k+1}{2k-1}\Big)^k$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)^4$ (Hinweis: Aufgabe 5, Blatt 8)

4. Sei A eine Menge und $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge von A, also

$$\mathcal{P}(A) := \{M : M \subset A\}.$$

Zeige, dass es keine surjektive Abbildung $A \to \mathcal{P}(A)$ gibt.

Hinweis: Widerspruchsbeweis mit Annahme $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$ surjektiv. Betrachte die Menge $C := \{x \in A : x \notin f(x)\}$ und $a \in A$ mit $f(a) = C$.

5.* Warnung: Diese Aufgabe ist unverschämt schwer.

Seien A und B Mengen. Wenn es $g\colon A \to B$ injektiv und $h\colon B \to A$ injektiv gibt, dann existiert $f\colon A \to B$ bijektiv.

Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben

Bei den Aufgaben wird immer auch eine Begründung durch ein schlüssiges und vollständiges Argument erwartet, sofern darauf nicht explizit verzichtet wird. In Ihrer Argumentation dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung und vorigen Übungsaufgaben verwenden, sollten aber immer einen genauen Verweis geben und in der Regel auch begründen, weshalb das Resultat anwendbar ist.
Die geklammerte Zahl auf dem Seitenrand gibt an, wieviele Übungspunkte auf die jeweilige Aufgabe oder den jeweiligen Aufgabenteil vergeben werden.

6. (a) Schreibe $\frac{1}{5}$ in Binärdarstellung, also finde $b_k \in \{0,1\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit (0,5)

$$\frac{1}{5} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k 2^{-k}.$$

(b) Zeige: Jedes $x \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$ hat eine periodische Dezimaldarstellung. (1,5)

Hinweis: Es gelte $x = \frac{p}{q}$. Betrachte den Beweis von Satz 5.18. Welche Gestalt hat $x_n := 10^n \big(x - \sum_{k=1}^{n} d_k 10^{-k}\big)$? Ist die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ endlich?

7. Untersuche folgende Reihen auf absolute Konvergenz. (3×1)

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k(k+42)}}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p(k)}{2^k}$ für eine komplexe Polynomfunktion $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^{-k} \frac{1}{k^{5/4}}$

8. Zeige oder widerlege: Die Menge alle Münzwurffolgen (1,5)

$$M := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \{\mathrm{K}, \mathrm{Z}\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

ist überabzählbar.

9. Sei $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{p(k)}$ eine **Umordnung** der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(a) Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente komplexe Reihe. (2)

Zeige, dass jede Umordnung von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ebenfalls absolut gegen denselben Wert konvergiert.

(b) Zeige, dass es eine Umordnung der konvergenten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ gibt, welche bestimmt gegen ∞ divergiert. (1,5)

Hinweis: Konstruiere eine geeignete Bijektion $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die immer erst ausreichend viele ungerade Indizes durchläuft, bevor sie wieder einen geraden Index abarbeitet.