Universität Ulm

Abgabe: **Mittwoch, 13.02.**, 10 Uhr
Gesamtpunktzahl: 10*

Prof. Dr. Emil Wiedemann
Dr. Manfred Sauter

Wintersemester 2018/2019

Übungen zur Analysis 1: Blatt 14

Vorbereitende und zusätzliche Aufgaben zur Übung

1. Bestimme jeweils den Konvergenzradius der nachfolgenden Potenzreihen.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(7k^5+3k^2+1)z^k$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k}z^{3k}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^k}z^k$

2. Bestimme den Wert von

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2 2^{-k}.$$

Hinweis: Was passiert, wenn man die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ gliedweise differenziert?

3. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \frac{n+\cos(nx)}{2n+1}.$$

Untersuche die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

4. Zeige oder widerlege: Die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge differenzierbarer Funktionen $f_n \colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ ist ebenfalls differenzierbar.

Schriftlich abzugeben für Bonuspunkte

Bei den Aufgaben wird immer auch eine Begründung durch ein schlüssiges und vollständiges Argument erwartet, sofern darauf nicht explizit verzichtet wird. In Ihrer Argumentation dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung und vorigen Übungsaufgaben verwenden, sollten aber immer einen genauen Verweis geben und in der Regel auch begründen, weshalb das Resultat anwendbar ist.
Die geklammerte Zahl auf dem Seitenrand gibt an, wieviele Bonuspunkte auf die jeweilige Aufgabe oder den jeweiligen Aufgabenteil vergeben werden.

5. Bestimme jeweils den Konvergenzradius der nachfolgenden Potenzreihen. (3×1*)

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{\sqrt{k+2}} z^k$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{2^k k!} z^k$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} 3^{(-1)^k k} z^{2k}$

6. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch (1*)

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

Untersuche die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

7. In dieser Aufgabe bezeichnet exp die über die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ definierte differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$. Wir wissen $\exp' = \exp$.

(a) Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f' = f$ und $f(0) = 0$. Zeige, dass f die Nullfunktion ist. (1*)

Hinweis: Betrachte $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) = \exp(-x) f(x)$.

(b) Beweise, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Funktionalgleichung $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ gilt. (1*)

Hinweis: Betrachte $x \mapsto \exp(x+y) - \exp(x)\exp(y)$ für $y \in \mathbb{R}$ fest.

(c) Zeige $\exp(1) = e$, wobei wie in Aufgabe 7 auf Blatt 7 (1,5*)

$$e := \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n.$$

Zeige damit, dass $\exp(q) = e^q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ gilt.

Hinweis: Verwende den Binomischen Lehrsatz und zeige $e \leq \exp(1)$ und

$$e \geq \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} m^{-k}$$

für alle $m \geq n$.

(d) Sei $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Polynomfunktion. Zeige (1,5*)

$$\lim_{x\to\infty} \big(p(x)\exp(-x)\big) = 0.$$

(e) Zeige, dass exp streng monoton wachsend ist mit $\exp(\mathbb{R}) = (0,\infty)$. (1*)