ulm university universität uulm

Prof. Dr. Emil Wiedemann
Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2018/2019

Zwischenklausur zur Analysis 1

28. November 2018; Bearbeitungszeit 120 Minuten; 100 Punkte insgesamt (10+10 Übungspunkte)

1. Beweisen oder widerlegen Sie mit einem Gegenbeispiel jede der folgenden Aussagen. Punkte gibt es hierbei ausschließlich für die Argumentation, nicht für die bloße Angabe des Wahrheitswerts. (6×5)

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Dann gilt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen 1, wenn $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert.

(b) Sei $B \subset \mathbb{Z}$ derart, dass $7 \in B$ und für alle $b \in B$ gelte, dass auch $b-4 \in B$ und $b+3 \in B$. Dann gilt $\mathbb{N} \subset B$.

(c) Mit A und B seien Aussagen bezeichnet. Dann ist die Aussage $\big((A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)\big) \Rightarrow A$ eine Tautologie.

(d) Es sei $M := \{1,2,3,4\}$ und $R \subset M \times M$ sei gegeben durch

$$R := \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(1,4),(4,1)\}.$$

Dann ist R eine Äquivalenzrelation auf M.

(e) Es seien $I_n = (a_n, b_n)$ offene Intervalle in $\mathbb{R}$, wobei $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n < b_n$ und $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

(f) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

2. Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 1$. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt (10)

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

3. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Formulieren Sie als prädikatenlogische Aussage, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen ∞ divergiert. (8)

Schreiben Sie dann die Negation dieser Aussage wieder prädikatenlogisch ohne Verwendung von $\neg$ oder Durchstreichen.

4. Bestimmen Sie für genau welche $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung (8)

$$||x+1|-2| \leq x$$

gilt. Beschreiben Sie dabei die Menge der gesuchten $x \in \mathbb{R}$ durch eine möglichst einfache Bedingung.

5. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch (10)

$$a_n := \frac{10-n^2}{5n^2+42n}.$$

Zeigen Sie direkt über die Definition der Folgenkonvergenz, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

6. Untersuchen Sie die nachfolgend definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf Konvergenz und bestimmen Sie dabei gegebenenfalls den Grenzwert. (4×6)

(a) $a_n := \dfrac{(n+1)^3}{(n^2+1)(2n-1)}$

(b) $a_n := \dfrac{(n+1)!}{n^n}$

(c) $a_n := \min\left\{(-1)^n, \dfrac{1}{n}\right\}$

(d) $a_n := \dfrac{(-2)^n + 4^n + 42n}{3 \cdot 4^n}$

7. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge **natürlicher** Zahlen. Zeigen Sie: Genau dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, wenn es ein $g \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_n = g$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ (d.h. $a_n = g$ bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$). (10)