Prof. Dr. Rico Zacher
Institut für Angewandte Analysis
Universität Ulm SoSe 2014

Nichtlineare Funktionalanalysis

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. (i) Man gebe ein Beispiel für einen vollständigen metrischen Raum (Ω, d) und eine Abbildung $F : \Omega \to \Omega$ an, bei dem

$$d(Fx, F\tilde{x}) < d(x, \tilde{x}) \quad \forall x, \tilde{x} \in \Omega,\ x \neq \tilde{x}, \tag{1}$$

gilt, aber F keinen Fixpunkt besitzt.

(ii) Sei (Ω, d) ein kompakter metrischer Raum und $F : \Omega \to \Omega$ derart, dass (1) gilt. Man zeige, dass F genau einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 2. Betrachtet wird die Abbildung $F : L_2((0,1)) \to L_2((0,1))$, definiert durch $F(u)(t) := \sin(u(t))$, $t \in (0,1)$. Man zeige:

(i) F ist auf $L_2((0,1))$ Lipschitz-stetig.

(ii) F ist auf $L_2((0,1))$ Gâteaux-differenzierbar.

(iii) F ist in $u_0 = 0$ nicht Fréchet-differenzierbar.

Aufgabe 3. Seien X, Y B-Räume, $r > 0$ und $F : B_r(x_0) \subset X \to Y$ stetig Fréchet-differenzierbar. Ferner gelte $||F'(x)^{-1}|| \leq \gamma$ für alle $x \in B_r(x_0)$ sowie $||F(x_0)|| < r/\gamma$. Man zeige, dass F eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda < 0\}$. Sei $f : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und stetig-differenzierbar bezüglich $x \in \mathbb{R}^n$ mit $f(t,0) = 0$ sowie $f_x(t,0) = 0$ für alle $t \geq 0$. Es gebe ferner $M, R > 0$ derart, dass $|f(t,x)| \leq M$ für alle $t \geq 0$ und $|x| \leq R$ gilt. Betrachtet wird nun das AWP

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \geq 0,\\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Man zeige mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $u_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $|u_0| \leq \delta$ das AWP genau eine globale Lösung (also für alle $t \geq 0$) besitzt.

Besprechung der Aufgaben: in der Übung am 12.05.2014.