Prof. Dr. Rico Zacher
Institut für Angewandte Analysis
Universität Ulm

SoSe 2014

Nichtlineare Funktionalanalysis

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Sei $X = c_0$ der Raum der reellen Nullfolgen (versehen mit der l^∞-Norm). Sei $F : X \to X$ definiert durch $(Fx)_j = (x_j)^2$, $j \in \mathbb{N}$, $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X$ (gliedweises Quadrieren). Man zeige: $F \in C^1(X, X)$, $F'(x) \in \mathcal{K}(X)$ für alle $x \in X$, aber F ist nicht kompakt.

Aufgabe 2. Sei X ein B-Raum, $r > 0$ und $F \in \mathcal{K}(\overline{B_r(0)}, X)$. Es existiere ein kompakter Operator $L \in \mathcal{B}(X)$ mit $||Fx - Lx|| < ||x - Lx||$ für alle $x \in \partial B_r(0)$. Man zeige, dass $D(I - F, B_r(0), 0)$ ungerade ist.

Aufgabe 3. Sei $X = l^2$ (versehen mit der kanonischen Norm) und D die abgeschlossene Einheitskugel in X. Sei $F : D \to X$ definiert durch

$$F(x) := \Big(\sqrt{1 - ||x||_{l^2}^2}, x_1, x_2, \dots\Big), \quad \text{für } x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D.$$

Zeigen Sie, dass F stetig ist und $F(D) \subset D$ gilt, dass aber F keinen Fixpunkt besitzt. Was geht schief im Hinblick auf den Schauderschen Fixpunktsatz?

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$u(t) = \frac{1}{3}\Big(t + u(t)^2 + \int_0^1 \sqrt{|u(s) - s|}\, ds\Big), \quad t \in [0, 1]$$

mindestens eine Lösung $u \in C([0, 1])$ mit $0 \le u(t) \le 1$ für alle $t \in [0, 1]$ besitzt.

Besprechung der Aufgaben: in der Übung am 14.07.2014.