



ulm university universität
uulm

**Universität Ulm
Fakultät für Mathematik und
Wirtschaftswissenschaften**

Direkte Methoden der Variationsrechnung

Diplomarbeit

in Wirtschaftsmathematik

vorgelegt von
Julian Schultheiß
Matrikelnummer: 599445
am 4. April 2012

Gutachter

Prof. Dr. Stefan Funken
Dr. Gerhard Baur

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	v
Abkürzungsverzeichnis	vi
1. Einleitung	1
2. Grundlagen der Variationsrechnung	4
2.1. Motivation und Beispiele	4
2.1.1. Brachistochrone	4
2.1.2. Problem der Dido	6
2.1.3. Konsumententheorie bei unbekannter Lebensdauer	7
2.2. Klassische Variationsrechnung	9
2.2.1. Die Eulerschen Differentialgleichungen	9
2.2.2. Die natürlichen Randbedingungen	15
2.2.3. Transversalitätsbedingungen	16
3. Existenztheorie	17
3.1. Variationsproblem ohne Minimum	17
3.2. Funktionalanalytische Hilfsmittel	18
3.2.1. Sobolevräume	18
3.2.2. Schwache Topologie in Banachräumen	24
3.2.3. Koerzivität	28
3.3. Existenzsätze	30
4. Direkte Methoden der Variationsrechnung	35
4.1. Die Ritz'sche Methode	37
4.1.1. Das mathematische Modell	37
4.1.2. Implementierung des Ritz'schen Verfahrens in Matlab	43

Inhaltsverzeichnis

4.1.3. Anwendung von R.m	49
4.2. Das Endliche Differenzenverfahren	53
4.2.1. Das mathematische Modell	53
4.2.2. Implementierung des Endlichen Differenzenverfahrens in Matlab .	58
4.2.3. Anwendung von ED.m	65
4.3. Konvergenz und Vergleich der Verfahren	68
5. Fazit	79
A. Appendix: Herleitungen	81
B. Appendix: Lösung des Brachistochronen-Problems	84
Literaturverzeichnis	85
Ehrenwörtliche Erklärung	87

Abbildungsverzeichnis

2.1. Skizze des Brachistochronen-Problems	5
2.2. Skizze der Transversalitätsbedingung $x(b) = \psi_b(b)$ am rechten Rand . . .	16
4.1. Graphische Ausgabe der Funktion R.m für das Problem $\int_0^1 (\dot{x}^2 - x^2 - 2tx) dt \rightarrow \min$ mit Randbedingungen $x(0) = x(1) = 0$ und Diskretisierungsparameter $n = 2$	51
4.2. Graphische Ausgabe der Funktion R.m für das Problem $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \min$ mit gegebener Randbedingung $x(0) = 1$ und Diskretisierungsparameter $n = 2$	52
4.3. Skizze des Endlichen Differenzenverfahrens	54
4.4. Näherungslösung ED_3 am Beispiel $\int_0^1 (\dot{x}^2 - x^2 - 2tx) dt \rightarrow \min$ mit gegebenen Randbedingungen $x(0) = x(1) = 0$ und Diskretisierungsparameter $n = 3$	58
4.5. Graphische Ausgabe der Funktion ED.m für das Problem $\int_0^1 (\dot{x}^2 - x^2 - 2tx) dt \rightarrow \min$ mit den Randbedingungen $x(0) = x(1) = 0$ und Diskretisierungsparameter $n = 8$	66
4.6. Graphische Ausgabe der Funktion ED.m für das Problem $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \min$ mit gegebener Randbedingung $x(0) = 1$ und Diskretisierungsparameter $n = 6$	67
4.7. Semi-logarithmische Darstellung der L^2 -Norm und der L^∞ -Norm des Fehlers für das Ritz'sche Verfahren für Beispiel 1	72
4.8. Doppel-logarithmische Darstellung der L^2 -Norm und der L^∞ -Norm des Fehlers für das Endliche Differenzenverfahren für Beispiel 1	72
4.9. Semi-logarithmische Darstellung der L^2 -Norm und der L^∞ -Norm des Fehlers für das Ritz'sche Verfahren für Beispiel 2	75
4.10. Doppel-logarithmische Darstellung der L^2 -Norm und der L^∞ -Norm des Fehlers für das Endliche Differenzenverfahren für Beispiel 2	75

Abkürzungsverzeichnis

<i>const</i>	konstant
bzw.	beziehungsweise
d.h.	das heißt
Endl. Diff.	Endliches Differenzenverfahren
insb.	insbesondere
o.B.d.A	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
PI	Partielle Integration
vgl.	vergleiche
z.B.	zum Beispiel

1. Einleitung

Die Variationsrechnung wurde im 18. Jahrhundert von Bernoulli, Euler, Lagrange und Legendre begründet. Den Ursprung hat die klassische Variationsrechnung im Jahr 1696, als Johann Bernoulli das Brachistochronen-Problem in der Leipziger Zeitschrift „Acta eruditorum lipsiae“ formulierte und zu dessen Lösung aufruf. In diesem Problem ging es um die Bestimmung der Kurve zwischen zwei Punkten mit der kürzesten Fallzeit, auf welches später noch genauer eingegangen wird. Das Problem wurde anschließend nicht nur von ihm selbst gelöst, sondern auch Gottfried Leibniz, Isaac Newton und sein Bruder Jakob Bernoulli sandten im gleichen und darauffolgenden Jahr teils unterschiedliche Lösungsvorschläge ein. Das Brachistochronen-Problem motivierte die Bernoulli-Brüder weitere allgemeine Variationsprobleme zu formulieren und zu deren Lösung aufzurufen und so entstand das Feld der Variationsrechnung.¹

Allgemein lässt sich ein Variationsproblem wie folgt formulieren:

$$I(x(t)) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \min_{x(t) \in \Phi} \quad (\text{MP})$$

wobei Randbedingungen in Form von $x(a) = x_1$ und $x(b) = x_2$ gegeben oder auch variabel gewählt werden können. Weiterhin sei $f(t, x(t), \dot{x}(t))$ eine stetig differenzierbare Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ und Φ die Menge der zulässigen Funktionen.

Aufgrund der Gestalt eines Variationsproblems ist die klassische Variationsrechnung zudem stark mit der Differential- und Integralrechnung verknüpft und demnach ebenso fast so alt. So konnte die Variationsrechnung früh ein intensives Interesse auf sich ziehen, da sich viele historische physikalische Fragestellungen als Variationsprobleme darstellen ließen. Infolgedessen befassten sich viele Mathematiker mit der Erforschung und Lösung von Variationsproblemen im folgenden 18. und 19. Jahrhundert.

¹Goldstine (1980)

Da natürlich auch im aktuellen Kontext verschiedene Variationsprobleme existieren, ist deren Lösung nach wie vor eminent wichtig. Hierbei unterscheiden wir zwei verschiedene Methoden. Auf der einen Seite besteht die Möglichkeit, ein Variationsproblem über die Eulerschen Differentialgleichungen zu lösen. Diese Methode und deren Theorie wird als klassische Variationsrechnung bezeichnet. Ist diese Variante nicht anwendbar, so kann man im Falle der Existenz einer Lösung ein Funktional auch auf direktem Weg minimieren. Bei den direkten Methoden der Variationsrechnung handelt es sich grundsätzlich um die Bestimmung einer approximativen Lösung mittels numerischer Verfahren. Hierzu wählt man eine Minimalfolge $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \inf_{x \in \Phi} I(x)$ gilt. Anschließend muss gezeigt werden, dass $\{y_n\}$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Um dies zu zeigen benötigen wir Kompaktheitskriterien, was sich allerdings in ∞ -dimensionalen Funktionenräumen schwierig gestaltet. Im eindimensionalen Fall würde nach Bolzano-Weierstraß genügen, Beschränktheit der Folge $\{y_n\}$ und Abgeschlossenheit des zulässigen Bereichs Φ zu fordern. Da in ∞ -dimensionalen Funktionenräumen der Satz von Bolzano-Weierstraß in dieser Form nicht gilt, muss auch hier ein geeignetes Kompaktheitskriterium gefunden werden. Dieses finden wir in der Theorie von Hilbert- und Banachräumen, insb. bei Sobolevräumen.

Im Falle der Existenz einer Lösung kann nun eine Näherungslösung durch numerische Methoden berechnet werden. Wir werden hier auf zwei Verfahren genauer eingehen. Es wird sowohl die Ritz'sche Methode als auch die Methode der Endlichen Differenzen vorgestellt. Zu jeder Methode wird das mathematische Modell, sowie die Implementierung in Matlab, Beispiele als auch die Konvergenzgeschwindigkeit der Verfahren diskutiert, um anschließend beide Verfahren vergleichen zu können. Es wird sich zeigen, dass beide Verfahren ihre Vorteile haben. Als Schlussfolgerung lässt sich sagen, dass das Ritz'sche Verfahren bei einem Variationsproblem mit glatter Lösung deutlich schneller zu konvergieren scheint, wohingegen das Endliche Differenzenverfahren aufgrund seiner Gestalt als Polygonzugverfahren Vorteile bei Funktionen mit Ecken bietet.

In Kapitel 2 gehen wir zunächst auf zwei historische Beispiele ein, welche die Variationsrechnung mitbegründeten und somit als Variationsproblem formuliert werden können. Da Variationsprobleme auch im aktuellen Kontext existieren, wird zudem ein Optimierungsproblem aus dem Bereich der Versicherungsmathematik behandelt, welches ebenfalls als Variationsproblem dargestellt werden kann. Anschließend diskutieren wir die

Grundlagen der Variationsrechnung, welche auch als klassische Variationsrechnung beschrieben werden. Zentraler Punkt hierbei ist die Erarbeitung der Eulerschen Differentialgleichungen, durch welche man in gewissen Fällen über die Differentialgleichung die Lösung eines Variationsproblems exakt bestimmen kann.

Die Existenz von Lösungen wird im anschließenden Kapitel 3 ausführlich diskutiert und ein Existenzsatz für konvexe Funktionale in funktionalanalytischen Räumen bewiesen. Hierbei gehen wir speziell auf die funktionalanalytische Theorie der Sobolevräume und deren Eigenschaften ein. Zudem muss ein entsprechendes Kompaktheitskriterium konstruiert werden, sodass auf alle nötigen Werkzeuge zur Formulierung und zum Beweis des Existenzsatzes zurückgegriffen werden kann.

Im Falle der Existenz einer Lösung kann nun eine Näherungslösung durch die in Kapitel 4 beschriebenen numerischen Methoden berechnet werden. Wir werden hier auf zwei Verfahren genauer eingehen.

Kapitel 5 schließt die Diplomarbeit mit einem Fazit ab, in welchem zusammenfassend die Ergebnisse nochmals aufgearbeitet und diskutiert werden.

2. Grundlagen der Variationsrechnung

In diesem Abschnitt wird eine Einführung in die klassischen Methoden der Variationsrechnung gegeben. Gegenstand der Variationsrechnung sind Funktionale. Funktionale sind Abbildungen die einer bestimmten Funktion eine Zahl - den Funktionalwert - zuordnen. Die Variationsrechnung beschäftigt sich hierbei mit der Frage, für welche Funktion ein bestimmtes Funktional seinen minimalen oder maximalen Wert annimmt. Oft schränkt man das Funktional noch mit gewissen Randbedingungen oder auch mit Nebenbedingungen ein.

2.1. Motivation und Beispiele

Zunächst möchten wir klassische als auch aktuelle Beispiele der Variationsrechnung diskutieren und zeigen, wo die Variationsrechnung ihren Ursprung hat. Desweiteren erkennen wir, dass die Variationsrechnung stark physikalisch motiviert ist und deshalb in der Physik viele praktische Beispiele findet.

2.1.1. Brachistochrone

Das berühmteste und älteste Variationsproblem und somit nach herrschender Meinung der Ursprung der Variationsrechnung ist das Brachistochronen-Problem. Es wurde von Johann Bernoulli im Jahr 1696 formuliert und in der wissenschaftlichen Zeitschrift „Acta eruditorum lipsiae“ veröffentlicht.¹ Hier ist ein Körper mit Masse $m > 0$ gegeben, der reibungsfrei entlang einer stetigen Kurve $y(x)$ vom Punkt (x_1, y_1) nach (x_2, y_2) gleiten soll, d.h. es gelte $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$. Zudem sei die Startgeschwindigkeit v_0 am Punkt (x_1, y_1) gegeben durch $v_0 = 0$. Wie muß nun die Kurve $y(x)$ geformt sein, damit die Laufzeit minimal wird? Die Kurve mit der kürzesten Laufbahn wird Brachistochrone genannt (von griechisch: brachistos ($\beta\rho\alpha\chi\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$) = kürzest, chronos ($\chi\rho\omicron\nu\omicron\varsigma$) = Zeit).

¹Goldstine (1980) und Kielhöfer (2010)

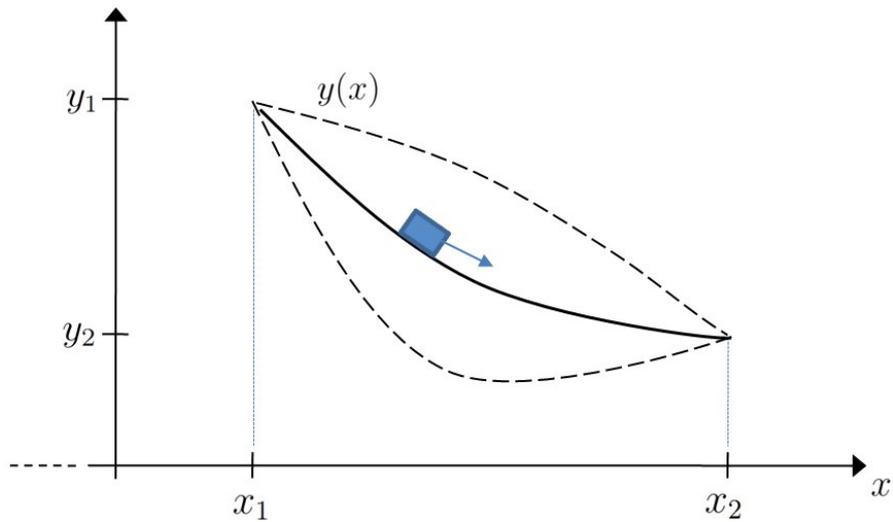


Abbildung 2.1.: Skizze des Brachistochronen-Problems

Herleitung der Durchlaufzeit: ²

Sei $m > 0$ die Masse des Körpers, $s(t)$ der bis zum Zeitpunkt t zurückgelegte Weg, $(x(t), y(t))$ die Position des Massenkörpers zum Zeitpunkt t und g die Fallbeschleunigung im vorherrschenden Massefeld. Es gilt nun:

$$m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = m \frac{g}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad \text{mit} \quad y' = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (2.1)$$

Für den zurückgelegten Weg gilt nun gemäß der Bogenlänge:

$$s(t) = \int_0^x \sqrt{1 + y'(\tau)^2} d\tau \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + y'^2} = \frac{\partial s}{\partial x} \quad (2.2)$$

$$\Rightarrow g = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \sqrt{1 + y'^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} \quad (2.3)$$

Mittels Integration von x_1 bis x_2 erhält man nun die Durchlaufzeit und somit unser Variationsproblem

$$I(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2gy}} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \rightarrow \min \quad (2.4)$$

²vgl. Seiler (2005), S.3.

wobei eine Lösung $\bar{y}(x) : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht ist, welche die Durchlaufzeit minimiert. Dieses Variationsproblem besitzt zudem die folgende Menge an zulässigen Funktionen:

$$\Phi := \{y(x) \in C^1[x_1, x_2] \mid y(x_1) = y_1 \text{ und } y(x_2) = y_2\} \quad (2.5)$$

Das Ziel ist nun ein $\bar{y}(x) \in \Phi$ zu finden, sodass $I(\bar{y}(x))$ minimal wird.

Selbstverständlich muss auch die Frage untersucht werden, ob überhaupt ein Minimum (bzw. Maximum) eines allgemeinen Variationsproblems existiert. Diese Fragestellung diskutieren wir in Kapitel 3 ausführlich.

2.1.2. Problem der Dido

Ein weiteres historisches Variationsproblem wird als „Problem der Dido“ bezeichnet und unterscheidet sich vom Brachistochronen-Problem durch eine zusätzliche Nebenbedingung. Das Problem lässt sich wie folgt formulieren. Welche Gestalt muss eine einfach geschlossene, glatte Kurve mit gegebener Länge $L > 0$ haben, damit die von ihr umrandete Fläche maximal wird? Mathematisch lässt sich das Problem als Variationsproblem formulieren, wobei

$$I(x(t)) = \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt \rightarrow \max \quad \iff \quad - \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt \rightarrow \min \quad (2.6)$$

unter der gegebenen Nebenbedingung

$$G(x(t)) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2} dt = L$$

Für die Funktion $x(t) : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ muss weiterhin $x(t_1) = x(t_2) = 0$ gelten. Die Menge der zulässigen Funktionen ist hier gegeben durch

$$\Phi := \{x(t) \in C^1[t_1, t_2] \mid x(t_1) = x(t_2) = 0\}$$

Ein solches Problem nennt man auch Variationsproblem mit isoperimetrischen Nebenbedingungen.

2.1.3. Konsumententheorie bei unbekannter Lebensdauer

Neben den bisher behandelten historischen Variationsproblemen existieren natürlich auch Variationsprobleme im aktuellen Kontext. Hierbei möchten wir auf ein Beispiel aus dem Bereich der Versicherungsmathematik eingehen, in welchem behandelt wird, wie eine beste Konsumallokation $c^*(t)$ aussehen müsste, um den Gesamtnutzen über eine unbekannte Lebensdauer zu maximieren.³

Für die Formulierung des Problems seien hierbei zunächst die folgenden Funktionen gegeben:

- $c(t)$: der Konsum zum Zeitpunkt t
- $g[c(t)]$: der Nutzen des Konsums $c(t)$ zum Zeitpunkt t
- $m(t)$: das Einkommen zum Zeitpunkt t
- $j(t)$: die vorherrschende Zinsrate zum Zeitpunkt t
- $\alpha(t)$: ein subjektiver Diskontfaktor der Nutzenfunktion
- $\pi(t)$: die Dichtefunktion des stochastischen Todeszeitpunkts in einem möglichen Intervall $[0, \bar{T}]$.

Weiterhin wird $\hat{\pi}(t)$ definiert als

$$\hat{\pi}(t) := \int_t^{\bar{T}} \pi(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq \bar{T} \quad (2.7)$$

wobei $\hat{\pi}(t)$ die Wahrscheinlichkeit beschreibt, dass der Konsument zum Zeitpunkt $t \in [0, \bar{T}]$ am Leben sein wird.

Das Ziel ist nun die Maximierung des Gesamtnutzens über die gesamte Lebensdauer des Konsumenten. Wird der Gesamtnutzen als das folgende Funktional definiert:

$$V(c(t)) := \int_0^{\bar{T}} \hat{\pi}(t) \alpha(t) g[c(t)] dt \quad (2.8)$$

³siehe Yaari (1965).

so ist die optimale Konsumallokation $c^*(t)$ gesucht, welche das Funktional $V(c(t))$ maximiert, d.h. $V(c^*(t)) = \max_{c(t) \in \Phi} V(c(t))$. Die Lösung $c^*(t)$ würde dem Konsumenten schließlich angeben, zu welchem Zeitpunkt er wieviel konsumieren sollte, um seinen Gesamtnutzen über seine komplette Lebensdauer zu maximieren. Dies ist nun ein Variationsproblem auf der Menge Φ , welche sich über Nebenbedingungen konkretisieren lässt.

Definieren wir zusätzlich das Gesamtvermögen des Konsumenten durch

$$S(t) := \int_0^t \left\{ \exp \int_\tau^t j(x) dx \right\} \{m(\tau) - c(\tau)\} d\tau \quad (2.9)$$

so ergibt sich $\dot{S}(t) = m(t) - c(t) + j(t)S(t)$. Aufgelöst und eingesetzt erhält man das folgende Variationsproblem

$$\int_0^{\bar{T}} \hat{\pi}(t) \alpha(t) g[m(t) - \dot{S}(t) + j(t)S(t)] dt \rightarrow \max. \quad (2.10)$$

Es gelten zusätzlich die folgenden Nebenbedingungen des Variationsproblems:

- Der Konsum $c(t)$ kann zu keinem Zeitpunkt negativ sein, d.h. es gilt $c(t) \geq 0 \forall t$.
- Sofern das Gesamtvermögen positiv ist, kann der Konsum das Einkommen übersteigen, dies gilt aber nicht falls das Gesamtvermögen zu einem Zeitpunkt t gleich null ist, d.h. es gilt $\dot{S}(t) \geq 0 \forall t$ mit $S(t) = 0$.
- Als dritte Nebenbedingung wählen wir, dass das Gesamtvermögen zum Todeszeitpunkt vollständig aufgebraucht wurde. Denn nur so kann garantiert werden, dass der Gesamtnutzen maximiert wird, d.h. es gilt $S(\bar{T}) = 0$.

Die Existenz einer Lösung als auch die Lösung selbst - sofern existent - sind natürlich von den gegebenen Funktionen $m(t)$, $j(t)$, $\alpha(t)$ und $\pi(t)$ als auch der gewählten Nutzenfunktion $g[c(t)]$ abhängig. Es kann jedoch im Falle der Existenz einer Lösung von einem klassischen Variationsproblem gesprochen werden.

2.2. Klassische Variationsrechnung

Das klassische Variationsproblem wird in der Literatur meist wie folgt formuliert:⁴

$$I(x(t)) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \min_{x(t) \in \Phi} \quad (\text{MP})$$

mit gegebenen Randbedingungen $x(a) = x_1$ und $x(b) = x_2$. Weiterhin sei $f(t, x(t), \dot{x}(t))$ eine stetig differenzierbare Funktion und Φ die Menge der zulässigen Funktionen, d.h.

$$\Phi := \{x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \mid x(a) = x_1, x(b) = x_2\} \quad (2.11)$$

Zudem kann jedes Maximierungsproblem ebenfalls in ein Minimierungsproblem umgeschrieben werden:

$$\int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \max \iff - \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \min \quad (2.12)$$

2.2.1. Die Eulerschen Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt sollen notwendige Bedingungen für die Lösung des Variationsproblems

$$I(x(t)) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \min_{x(t) \in \Phi} \quad (\text{MP})$$

erarbeiten werden. Hierzu unterscheiden wir zunächst verschiedene Typen von Extrema.

Definition 1. (*Minimatypen*)

Für ein gegebenes Variationsproblem (MP) heißt $\bar{x}(t) \in \Phi$

- schwaches lokales Minimum, falls gilt
 $\exists \epsilon_0 > 0 : I(\bar{x}(t)) \leq I(x(t)) \forall x \in \Phi \text{ mit } \|x(t) - \bar{x}(t)\|_1 < \epsilon_0$
- starkes lokales Minimum, falls gilt
 $\exists \epsilon_0 > 0 : I(\bar{x}(t)) \leq I(x(t)) \forall x \in \Phi \text{ mit } \|x(t) - \bar{x}(t)\|_0 < \epsilon_0$
- globales Minimum, falls gilt
 $I(\bar{x}(t)) \leq I(x(t)) \forall x \in \Phi$

⁴Das Variationsproblem wird zunächst wie Kielhöfer (2010) S.9 formuliert, es kann aber auch in parametrischer Form formuliert werden.

wobei $\|x\|_0 := \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|$ für $x \in C[a,b]$ und $\|x\|_1 := \sup_{t \in [a,b]} |x(t)| + \sup_{t \in [a,b]} |\dot{x}(t)|$ für $x \in C_1^s[a,b]$.

Sei $\bar{x}(t) : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Variationsproblems (MP), so betrachten wir zunächst Funktionen in einer Umgebung von $\bar{x}(t)$ der Art $x(t) + \epsilon\eta(t)$. Hierzu wird die folgende Definition einer Testfunktion benötigt.

Definition 2. (Testfunktion)

Eine Funktion $\eta : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Testfunktion in einer Umgebung $(-\epsilon_0, \epsilon_0)$ für ein $x(t) \in \Phi$, falls gilt:

$$\exists \epsilon > 0 \text{ mit } x(t) + \epsilon\eta(t) \in \Phi \quad \forall |\epsilon| < \epsilon_0 \quad (2.13)$$

Betrachten wir nun $h(\epsilon) := I(x + \epsilon\eta)$ für eine Funktion $x(t) \in \Phi$ und eine zugehörige Testfunktion $\eta : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. $h(\epsilon)$ entspricht somit der Variation von $x(t)$ in Richtung $\eta(t)$. Für eine Lösung $\bar{x}(t)$ des Variationsproblems (MP) besitzt $h(\epsilon)$ an der Stelle $\epsilon = 0$ ein lokales Extremum. Es gilt dann

$$h'(0) = \frac{\partial}{\partial \epsilon} I(\bar{x} + \epsilon\eta)|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [I(\bar{x} + \epsilon\eta) - I(\bar{x})] = 0.$$

und auf Basis der Definition von $h(\epsilon)$ kann nun mit Standardtechniken der Analysis weiter argumentiert werden. Dieses Ergebnis führt nun zu folgender Definition der Gâteaux-Variation:⁵

Definition 3. (Gâteaux-Variation)

Sei $x \in \Phi$ und η eine Testfunktion für x gemäß Definition 2. Dann heißt

$$\partial I(x, \eta) = \frac{\partial}{\partial \epsilon} I(x + \epsilon\eta)|_{\epsilon=0} \quad (2.14)$$

die erste Variation oder Gâteaux-Variation des Funktionals I bei $x(t)$ in Richtung η (vorausgesetzt der Grenzwert existiert).

Analog werden auch höhere Variationen definiert:

$$\partial^n I(x, \eta) = \frac{\partial^n}{\partial \epsilon^n} I(x + \epsilon\eta)|_{\epsilon=0}$$

⁵vgl. Kielhöfer (2010), S.15f.

Nun lässt sich weiter folgender Satz herleiten:

Satz 1. Ist $\bar{x}(t)$ ein schwaches lokales Minimum für $I(x)$, so gilt:

$$\partial I(\bar{x}, \eta) = 0 \quad \forall \text{ Testfunktionen } \eta \tag{2.15}$$

Beweis. $\bar{x}(t)$ ist lokales Minimum $\Rightarrow h(\epsilon)$ besitzt für alle η ein Minimum an der Stelle $\epsilon = 0 \Rightarrow h'(0) = 0 \forall \eta \Rightarrow \partial I(\bar{x}, \eta) = 0 \forall \eta$. □

Unser Ziel ist nun Bedingungen herauszuarbeiten, die frei von Quantoren sind und somit keine Zusätze wie zum Beispiel $\forall \eta \dots$ enthalten. Hierzu benötigen wir noch folgende Hilfsmittel:

Satz 2. (Fundamentallemma der Variationsrechnung)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und gelte für alle stetigen Funktionen $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $g(a) = g(b) = 0$

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = 0$$

Daraus folgt $f(x) \equiv 0$ auf dem Intervall $[a, b]$.

Beweis. Ann.: $\exists t_0 \in [a, b]$ mit $f(t_0) \neq 0$, o.B.d.A $f_1(t_0) > 0$

$$f \stackrel{\text{stetig}}{\Rightarrow} \exists \text{ Intervall } [\alpha, \beta] \text{ mit } t_0 \in [\alpha, \beta] \text{ und } f_1(t) > 0 \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Wir konstruieren nun eine zulässige, stetige Funktion $g = (g_1(t), \dots, g_n(t))^T$ mit $g_2(t) = \dots = g_n(t) = 0$ auf $[a, b]$ und für $g_1(t)$ gelte:

$$g_1(t) = 0 \text{ für } |t - t_0| \geq \delta \text{ und } g(t) > 0 \text{ für } |t - t_0| < \delta.$$

$$g_1(t) \text{ ist stetig auf } [a, b] \text{ mit } g(a) = g(b) = 0.$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)g(t) dt = \int_\alpha^\beta f(t)g(t) dt = \int_\alpha^\beta f_1(t)g_1(t) dt > 0$$

Widerspruch zur Annahme. \nexists

□

Der Satz von DuBois-Reymond hilft uns als Pendant zum Fundamentallemma der Variationsrechnung ebenfalls bei der Formulierung eines der zentralen Sätze der klassischen Variationsrechnung.⁶

Satz 3. (*Satz von DuBois-Reymond*)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stückweise stetig und es gelte

$$\int_a^b f(t)\dot{g}(t) dt = 0 \quad \forall g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g \in C_1^s[a, b] \text{ mit } g(a) = g(b) = 0.$$

Dann ist $f \equiv \text{const}$ auf $[a, b]$. Desweiteren sind die Unstetigkeitsstellen von f hebbar.

Beweis. Gelte o.B.d.A $n = 1$ und wir definieren $F(t) := \int_a^t f(\tau) d\tau$ für f stückweise stetig auf dem Intervall $[a, b]$.

$$\Rightarrow F \in C_1^s[a, b], \quad F(a) = 0, \quad \dot{F}(t) = f(t) \text{ bis auf die Sprungstellen von } f.$$

Desweiteren definieren wir $P(t) := F(b) + \frac{t-b}{b-a}F(b)$, sodass $P(a) = 0$ und $P(b) = F(b)$ gilt und setze nun $g(t) := F(t) - P(t)$.

$$\Rightarrow g \in C_1^s[a, b], \quad g(a) = g(b) = 0, \quad \dot{g} = f - \dot{P} \text{ und } \dot{P} = \frac{F(b)}{b-a} \equiv \text{const.}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\dot{g}(t) dt &= \int_a^b f(t)(f(t) - \dot{P}(t)) dt \\ &= \int_a^b (f(t) - \dot{P}(t))^2 dt + \int_a^b \dot{P}(t)(f(t) - \dot{P}(t)) dt \\ &\stackrel{\text{PI}}{=} \int_a^b (\dot{g})^2 dt + \dot{P}g|_a^b - \int_a^b \ddot{P}g dt \\ &= \int_a^b (f(t) - \dot{P}(t)) dt = 0 \\ &\stackrel{\dot{g} \equiv \text{const}}{\Rightarrow} f(t) = \dot{P}(t) \quad \forall x \in [a, b]. \end{aligned}$$

□

⁶vgl. Kielhöfer (2010), S.20ff.

Hieraus folgt die zentrale Eulersche Differentialgleichung, durch welche in der klassischen Variationsrechnung für gewisse Variationsprobleme die exakte Lösung $\bar{x}(t)$ berechnet werden kann.

Satz 4. (Eulersche Differentialgleichungen)

Sei $\bar{x}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein schwaches lokales Minimum für das Problem (MP), sodass $\dot{\bar{x}}(t)$ existiert und stetig ist (abgesehen von Ecken $t_1, \dots, t_m \in [a, b]$). Dann gilt

$$(i) \quad \exists c \in \mathbb{R}^n : f_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) = c + \int_a^t f_x(\tau, \bar{x}(\tau), \dot{\bar{x}}(\tau)) d\tau \quad \forall t \in [a, b] \quad (2.16)$$

$$(ii) \quad \frac{\partial}{\partial t} f_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) = f_x(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \quad \forall t \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_m\} \quad (2.17)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (i) \quad 0 &\stackrel{\text{Satz 1}}{=} \partial I(\bar{x}, \eta) \\ &\stackrel{\text{PI}}{=} \int_a^b \underbrace{[f_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \int_a^t f_x(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau]}_{=c \text{ (Satz von DuBois-Reymond)}} \dot{\eta}(t) dt \\ &\Rightarrow f_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = c + \int_a^t f_x(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

(ii) folgt aus (i) und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. □

Allerdings ist Euler nur eine notwendige, keinesfalls eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer Lösung.

Definition 4. (Extremale)

Eine Funktion $x \in \Phi$ heißt Extremale von $I(x(t))$, falls gilt:

- (i) $x \in C_1[a, b]$
- (ii) x löst auf $[a, b]$ die Eulersche Differentialgleichung.

Desweiteren heißt eine Extremale $x \in \Phi$ regulär, falls gilt

$$\det(f_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))) \neq 0.$$

Nun erarbeiten wir gewisse Sonderfälle des Variationsproblems (*MP*), welche unter bestimmten einfacheren Bedingungen gelten und uns die Berechnung einer exakten Lösung $\bar{x}(t)$ erleichtern werden.

f hängt nicht explizit von t ab, d.h. $f(t, x(t), \dot{x}(t)) = f(x(t), \dot{x}(t))$:

Es gilt demnach: $f_t = 0$. Zusammen mit der Differentialgleichung von Euler folgt nun:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{x} \left(\frac{\partial}{\partial t} f_{\dot{x}} - f_x \right) = \dot{x} \frac{\partial}{\partial t} f_{\dot{x}} - \dot{x} f_x \\ &= \dot{x} \frac{\partial}{\partial t} f_{\dot{x}} - \dot{x} f_x + \ddot{x} f_{\dot{x}} - \ddot{x} f_{\dot{x}} + \underbrace{f_t}_{=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\dot{x} f_{\dot{x}} - f) \end{aligned}$$

Einmalige Integration bezüglich t führt nun zu:

$$(\dot{x} f_{\dot{x}} - f) = \text{const.}$$

Ein solches Variationsproblem wird meist auch als autonomes Variationsproblem bezeichnet.

f hängt nicht explizit von $x(t)$ ab, d.h. $f(t, x(t), \dot{x}(t)) = f(t, \dot{x}(t))$:

Demnach gilt: $f_x = 0$. Aus der Eulerschen Differentialgleichung folgt nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_{\dot{x}} &= 0 \\ \Rightarrow f_{\dot{x}} &= \text{const.} \end{aligned}$$

f hängt nicht explizit von $\dot{x}(t)$ ab, d.h. $f(t, x(t), \dot{x}(t)) = f(t, x(t))$:

Es gilt $f_{\dot{x}} = 0$ und die Eulersche Differentialgleichung führt zu

$$f_x = 0$$

Dies ist bereits eine implizite Darstellung der Lösung $\bar{x}(t)$.

2.2.2. Die natürlichen Randbedingungen

Wir betrachten weiterhin das Variationsproblem (MP):

$$I(x(t)) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \min_{x(t) \in \Phi} \quad (\text{MP})$$

wobei nun aber die Randbedingungen nicht wie bisher für beide Ränder explizit gegeben sind. Gelte nun $x(a) = x_1$ und $x(b)$ beliebig. Die Funktion $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist am linken Rand eindeutig festgelegt, jedoch am rechten Rand frei wählbar. Ein Lösung $\bar{x}(t)$ des Problems diesen Typs muss neben der Eulerschen Differentialgleichung zusätzlich noch die folgende natürliche Randbedingung am rechten Rand erfüllen:

$$f_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))|_{t=b} = 0 \quad (2.18)$$

Sei $x(a)$ beliebig und $x(b) = x_2$ gegeben, so gilt die natürliche Randbedingung am linken Rand analog, d.h.

$$f_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))|_{t=a} = 0 \quad (2.19)$$

Sind beide Randbedingungen x_1 und x_2 beliebig wählbar, so gelten die natürlichen Randbedingungen sowohl am linken als auch am rechten Rand und somit die Gleichungen (2.14) und (2.15) gleichzeitig.

Beweis. Gelte o.B.d.A. $x(a) = x_1$ und $x(b)$ beliebig.

Hier ist jede Funktion $\eta \in C_1^s[a, b]$ mit $\eta(a) = x_1$ eine zulässige Testfunktion.

$$\begin{aligned} \partial I(\bar{x}, \eta) &= \int_a^b (f_x \eta + f_{\dot{x}} \dot{\eta}) dt \stackrel{\text{PI}}{=} \int_a^b f_x \eta dt + f_{\dot{x}} \eta|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f_{\dot{x}} \eta dt \\ &= f_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \eta(t)|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b (f_x(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) - \frac{\partial}{\partial t} f_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))) \eta(t) dt \\ &= f_{\dot{x}}(b, \bar{x}(b), \dot{\bar{x}}(b)) \eta(b) - f_{\dot{x}}(a, \bar{x}(a), \dot{\bar{x}}(a)) \eta(a) \end{aligned}$$

Mit $\eta(a) \neq 0$ und $\eta(b) = 0$ erhält man die natürlichen Randbedingungen bei $t = a$. Analog führt $\eta(a) = 0$ und $\eta(b) \neq 0$ zu Gleichung (2.15). \square

2.2.3. Transversalitätsbedingungen

Gegeben sei das Variationsproblem (MP), wobei diesmal die Randpunkte a und b nur auf einer bestimmten Fläche liegen müssen. Das Problem wird wie folgt formuliert:

$$I(x(t)) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \min_{x(t) \in \Phi} \quad (MP)$$

wobei o.B.d.A. $x(a) = x_1$ und für den rechten Rand gelte die transversale Randbedingung $x(b) = \psi_b(b)$ für eine gegebene Funktion $\psi_b \in C_1(\mathbb{R}^n)$, wobei der rechte Randpunkt dadurch variabel ist. Eine Lösung $\bar{x}(t) : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ muss demnach neben der Eulerschen Differentialgleichung auch die folgende Transversalitätsbedingung erfüllen:⁷

$$f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) + f_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))(\dot{\psi}_b(t) - \dot{\bar{x}}(t))|_{t=\alpha} = 0 \quad (2.20)$$

Ist hingegen der rechte Rand vollkommen gegeben mit $x(b) = x_2$, jedoch der linke Rand durch eine transversale Randbedingung mittels $x(a) = \psi_a(a)$ für $\psi_a \in C_1(\mathbb{R}^n)$ gegeben, so muss auch hier die analoge Transversalitätsbedingung mit ψ_b an der Stelle $t = \beta$ für die Lösung $\bar{x}(t)$ auf dem Intervall $[\alpha, b]$ gelten. Im Falle von Transversalität an beiden Rändern müssen folglich Transversalitätsbedingungen für beide Ränder gelten und eine Lösung existiere dann auf dem anfangs unbekanntem Intervall $[\alpha, \beta]$.

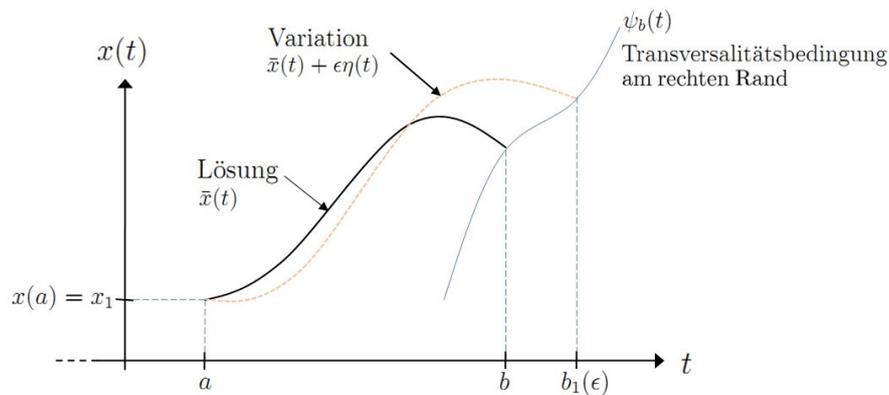


Abbildung 2.2.: Skizze der Transversalitätsbedingung $x(b) = \psi_b(b)$ am rechten Rand⁸

⁷Beweis siehe Meyberg und Vachenaer (2006), S.420f.

⁸vgl. Intriligator (1971), S.316.

3. Existenztheorie

In diesem Kapitel diskutieren wir die Existenz von Lösungen von Variationsproblemen. Denn nur in diesem Falle können wir die fehlerfreie Anwendung direkter Methoden zur Berechnung einer Näherungslösung garantieren. Wir werden in diesem Kapitel den Existenzsatz für konvexe Funktionale herleiten, welcher unter gewissen Voraussetzungen die Existenz einer Lösung garantiert und behandeln anschließend auch die Eindeutigkeit von Lösungen. Hierzu werden zunächst die Einführung verschiedener funktionalanalytischer Hilfsmittel sowie deren Eigenschaften benötigt.

Dass nicht jedes Variationsproblem eine Lösung besitzt, wird im folgenden Beispiel deutlich:

3.1. Variationsproblem ohne Minimum

Gegeben sei das folgende Variationsproblem

$$I(x(t)) = \int_0^1 \sqrt{x(t)^2 + (\dot{x}(t))^2} dt \quad (3.1)$$

mit den Randbedingungen $x(0) = 0$ und $x(1) = 1$ und dem zulässigen Bereich $\Phi := \{x \in C^1[0, 1] : x(0) = 0, x(1) = 1\}$.

Wir zeigen zunächst, dass $I(x) > 1 \forall x(t) \in \Phi$ gilt:

$$I(x) = \int_0^1 \sqrt{x(t)^2 + (\dot{x}(t))^2} dt > \int_0^1 |\dot{x}| dt \geq \int_0^1 \dot{x} dt = x(1) - x(0) = 1.$$

Aufgrund der Stetigkeit von $x(t)$ auf dem Intervall $[0, 1]$ sowie der rechten Randbedingung $x(1) = 1$ gilt strikt „>“ und nicht „≥“ für die obere Gleichungskette.

Hieraus folgt nun

$$\inf_{x \in \Phi} I(x(t)) \geq 1$$

Desweiteren betrachten wir die Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in $C^1[0, 1]$ definiert durch $x_k(t) := t^k$ damit $x_k(t) \in \Phi \forall k \in \mathbb{N}$ und mit $\dot{x}_k(t) = kt^{k-1}$. Nun können wir zeigen, dass der Wert des Funktionals dieser Funktionenfolge gegen 1 geht ($k \rightarrow \infty$).

$$\begin{aligned} I(x_k) &= \int_0^1 \sqrt{t^{2k} + k^2 t^{2k-2}} dt = \int_0^1 t^{k-1} \sqrt{t^2 + k^2} dt \\ &\leq \int_0^1 t^{k-1} (t + k) dt = \int_0^1 t^k dt + k \int_0^1 t^{k-1} dt \\ &= \left[\frac{1}{k+1} t^{k+1} \right]_{t=0}^{t=1} + k \left[\frac{1}{k} t^k \right]_{t=0}^{t=1} \\ &= 1 + \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

Es gilt nun $\lim_{k \rightarrow \infty} I(x_k) = 1$ als auch $\inf_{x \in \Phi} I(x) = 1$. Da allerdings $I(x) > 1 \forall x \in \Phi$ gilt, folgt, dass das Funktional $I(x)$ sein Minimum auf Φ nie annehmen wird.

3.2. Funktionalanalytische Hilfsmittel

Bevor die direkte Methode der Variationsrechnung beschrieben werden kann, werden wir zunächst einige funktionalanalytische Hilfsmittel definieren und beschreiben, welche die Formulierung erst ermöglichen sowie erleichtern werden.

3.2.1. Sobolevräume

In diesem Abschnitt werden Sobolevräume eingeführt, welche oft eine geeignete Umgebung bilden um funktionalanalytische Theorien bezüglich partieller Differentialgleichungen anzuwenden. Nach der Definition und der Idee der Sobolevräume werden anschließend einige wichtige und hilfreiche Folgerungen und Sätze gezeigt, die im weiteren Verlauf - im Speziellen bei den Beweisen der Existenztheorie - benötigt werden.

Definition 5. (Hölderräume)

Der Hölderraum $C^{k,\gamma}(U)$ beinhaltet alle Funktionen $u \in C^k(U)$ für die die folgende Hölder-Norm endlich ist:

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(U)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|\nabla^\alpha u\|_{C(U)} + \sum_{|\alpha|=k} [\nabla^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(U)}$$

wobei jeweils gilt

$$\|\nabla^\alpha u\|_{C(U)} := \sup_{x \in U} |\nabla^\alpha u(x)|$$

$$[\nabla^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(U)} := \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \frac{|\nabla^\alpha u(x) - \nabla^\alpha u(y)|}{|x - y|^\gamma}$$

Der Hölderraum $C^{k,\gamma}(U)$ ist demnach die Menge aller Funktionen u auf U , welche k -mal stetig differenzierbar sind und deren k -te partielle Ableitungen ebenfalls beschränkt und hölderstetig mit Exponent $\gamma \in (0, 1]$ sind. Der Raum $C^{k,\gamma}(U)$ besitzt eine praktische mathematische Struktur mit hilfreichen Eigenschaften wie z.B. dass $C^{k,\gamma}(U)$ ein Banachraum $\forall k \forall \gamma$ ist.

Da in Hölderräumen oft keine geeigneten analytischen Schätzungen gemacht werden können, eignen sich diese Räume meist nicht um die Theorie der partiellen Differentialgleichungen anzuwenden. Wir würden andererseits eher Räume benötigen, welche weniger glatte Funktionen enthalten. Sobolevräume eignen sich hierfür sehr gut, da sie eine perfekte Balance bilden. Sie besitzen einige, aber nicht zu viele explizite Glätteigenschaften. Da Sobolevräume über schwache Ableitungen definiert werden, muss zunächst der Begriff der schwachen Ableitung eingeführt werden.

Motivation für die Definition der schwachen Ableitungen:

Angenommen es sei $u \in C^1(\Omega)$ wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Für eine Funktion $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ ergibt die partielle Integration

$$\int_{\Omega} u \varphi_{x_i} dx = - \int_{\Omega} u_{x_i} \varphi dx + \underbrace{[u(x) \cdot \varphi(x)]_{\partial\Omega}}_{=0, \text{ da } \varphi \in C_c^\infty}$$

wobei $C_c^\infty(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \varphi \text{ hat einen kompakten Träger}\}$ gilt.

Im allgemeineren Fall mit $k \in \mathbb{N}$, $u \in C^k(\Omega)$ und α ein Multiindex, gilt demnach:

$$\int_{\Omega} u \nabla^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \nabla^\alpha u \varphi \, dx.$$

Falls nun aber die Funktion u nicht k -mal im klassischen Sinne differenzierbar ist, d.h. $u \notin C^k(\Omega)$, dann hat der Ausdruck $\nabla^\alpha u$ laut Definition keine Bedeutung. Um diese Problematik zu lösen, wird der Begriff der schwachen Ableitungen eingeführt.

Definition 6. (Schwache Ableitungen)

Gelte $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $u \in L^2(\Omega)$ und sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex, dann heißt v eine α -te schwache Ableitung von u , falls gilt

$$\int_{\Omega} u(x) \nabla^\alpha \varphi(x) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) \varphi(x) \, dx \quad \forall \text{ Testfunktionen } \varphi(x) \in C_c^\infty(\Omega).$$

Notation: $\nabla^\alpha u = v$.

Bemerkung 1. Eine schwache Ableitung ist, sofern sie existiert, fast überall eindeutig.¹

Beispiel 1. Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist auf ganz \mathbb{R} nicht klassisch differenzierbar, besitzt aber eine schwache Ableitung der Form

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & : x < 0 \\ c & : x = 0 \\ +1 & : x > 0 \end{cases} \quad \text{für beliebiges } c \in \mathbb{R}$$

da $\{0\}$ eine Nullmenge ist und daher unbedeutend für eine Integration über \mathbb{R} .

Definition 7. ($L^p(\Omega)$)

Der Raum $L^p(\Omega)$ sei definiert durch

$$L^p(\Omega) := \left\{ x(t) : \int_{\Omega} |x(t)|^p \, dt < \infty \right\}. \tag{3.2}$$

¹Folgt, da $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$ liegt für $1 \leq p < \infty$; siehe Werner (2005), S.203f.

Die L^p -Norm einer Funktion $x \in L^p(\Omega)$ ist gegeben durch

$$\|x\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |x(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Definition 8. (Sobolevräume)

Der Sobolevraum $W^{k,p}(\Omega)$ wird definiert als die Menge aller Funktionen $u \in L^p(\Omega)$ sodass für jeden Multiindex $|\alpha| \leq k$ alle schwachen Ableitungen $\nabla^\alpha u$ wieder in $L^p(\Omega)$ liegen:

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \nabla^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall |\alpha| \leq k\} \quad (3.3)$$

$k \in \mathbb{R}$ wird die Ordnung des Sobolevraums $W^{k,p}(\Omega)$ genannt.

Definition 9. (Sobolev-Norm)

Für Funktionen $u \in W^{k,p}(\Omega)$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $1 \leq p \leq \infty$ definiert man die Sobolev-Norm (oder $W^{k,p}$ -Norm) durch

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, & \text{falls } p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{falls } p = \infty. \end{cases} \quad (3.4)$$

Desweiteren wird $W_0^{k,p}(\Omega)$ als der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$ definiert.

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{k,p}(\Omega) : \exists u_k \in C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } u_k \rightarrow u \text{ in } W^{k,p}(\Omega) \right\}.$$

Eigenschaften von Sobolevräumen:

- Für $p = 2$ gilt: $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ wobei $H^k(\Omega)$ ein Hilbertraum mit Ordnung k ist. Dasselbe gilt für den Abschluss: $W_0^{k,2}(\Omega) = H_0^k(\Omega)$. Zudem ist jeder Hilbertraum ein gleichmäßig konvexer Banachraum und damit reflexiv. Zudem gilt $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. Der Hilbertraum $H^k(\Omega)$ hat das folgende Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} \partial^\alpha u(x) \cdot \partial^\alpha v(x) dx.$$

- Für $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$ ist der Sobolevraum $W^{k,p}(\Omega)$ mit der oben definierten Sobolev-Norm ein Banachraum.
- Für $1 \leq p \leq \infty$ gilt $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.
- Gelte $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$, $|\alpha| \leq k$, dann gelten auch:
 1. Ist $\Omega^* \subset \Omega$ eine offene Teilmenge von Ω , dann gilt auch $u \in W^{k,p}(\Omega^*)$.
 2. Ist $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$, dann gilt auch $\eta u \in W^{k,p}(\Omega)$.

Zur Abschätzung der L^p -Norm von Funktionen im Abschluss $W_0^{1,p}$ des Sobolevraums $W^{1,p}$ wird nun die Poincaré-Ungleichung eingeführt, welche wir später im Beweis des Existenzsatzes benötigen.

Satz 5. (Poincaré-Ungleichung in $W_0^{1,p}$)

$\forall p \in [1, \infty] \exists c_u > 0$, so dass

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq c_u \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \quad (3.5)$$

wobei $(u)_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(y) dy$ dem Durchschnitt von u auf Ω entspricht.

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis.²

Ann.: Gleichung (3.5) ist falsch. Dann würde gelten:

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists u_k \in W^{1,p}(\Omega) : \|u_k - (u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} > k \|\nabla u_k\|_{L^p(\Omega)}$$

Die Folge $\{u_k\}$ wird normalisiert und $\{v_k\}$ definiert durch

$$v_k := \frac{u_k - (u_k)_\Omega}{\|u_k - (u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Dadurch gilt dann:

$$(v_k)_\Omega = 0, \quad \|v_k\|_{L^p(\Omega)} = 1$$

$$\stackrel{\text{Annahme}}{\Rightarrow} \|\nabla v_k\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{k} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Insbesondere sind die Funktionen $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ beschränkt in $W^{1,p}(\Omega)$.

$$\Rightarrow \exists \text{ Teilfolge } \{v_{k_j}\}_{j=1}^\infty \subset \{v_k\}_{k=1}^\infty \text{ und } \exists v \in L^p(\Omega) : v_{k_j} \rightarrow v \text{ in } L^p(\Omega)$$

²vgl. Evans (2010)

$$\stackrel{\text{Def. } v_k}{\Rightarrow} (v)_\Omega = 0, \quad \|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$$

Desweiteren impliziert die Annahme, dass für alle $i = 1, \dots, n$ und $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_{\Omega} v \phi_{x_i} \, dx = \lim_{k_j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v_{k_j} \phi_{x_i} \, dx = - \lim_{k_j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v_{k_j, x_i} \phi \, dx = 0$$

wobei $C_c^\infty(\Omega)$ die Menge aller glatten Funktionen mit kompaktem Träger auf Ω ist. Funktionen $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ werden oft auch Testfunktionen genannt.

Daraus folgt $v \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $\nabla v = 0$ fast überall.

$\Rightarrow v$ ist konstant auf Ω

Da $(v)_\Omega = 0 \Rightarrow v \equiv 0$

\Rightarrow Widerspruch zu $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$

\Rightarrow Annahme ist falsch. □

Desweiteren wird noch die stetige Einbettung und damit die folgenden Sobolev'schen Einbettungssätze als wichtiges Hilfsmittel für den Beweis des Existenzsatzes in den späteren Abschnitten benötigt.

Definition 10. (Stetige Einbettung)

Seien zwei normierte Räume X, Y mit $X \subset Y$ gegeben. Dann heißt X stetig eingebettet in Y , falls gilt

$$\exists c > 0 \text{ mit } \|x\|_X \leq c \cdot \|x\|_Y \quad \forall x \in X$$

Notation: $X \hookrightarrow Y$.

Bemerkung 2. Es gilt für L^p -Räume die folgende Kette an stetigen Einbettungen

$$L^\infty(\Omega) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega).$$

Allgemein gilt $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für $1 \leq q \leq p \leq \infty$.

Satz 6. (Sobolev'sche Einbettungssätze)³

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Lipschitz-Gebiet⁴ und beschränkt und gelte $1 \leq p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten die folgenden stetigen Einbettungen:

1. Für $mp < N$ gilt:
 $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-mp}$.
2. Für $mp = N$ gilt:
 $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für $1 \leq q < \infty$.
3. Für $mp > N$ gilt:
 $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$

Beweis. siehe Adams und Fournier (2003), Satz 5.4.

□

3.2.2. Schwache Topologie in Banachräumen

Wie bereits erwähnt, benötigt man für die direkten Methoden der Variationsrechnung entsprechende Kompaktheitskriterien. Leider existiert in ∞ -dimensionalen Funktionenräumen kein derart einfaches Kompaktheitskriterium wie im eindimensionalen. Hier könnte man einfach Bolzano-Weierstraß verwenden. Eine große Rolle spielt hier die Kompaktheit bzgl. der schwachen Topologie in Banachräumen. Wir möchten in diesem Abschnitt sowohl die Theorie der schwachen Topologie behandeln als auch auf deren wichtigste Charakteristika in unserem Zusammenhang eingehen. Später können wir durch die Existenz von schwach-konvergenten Teilfolgen zusammen mit den Sobolev'schen Einbettungssätzen in reflexiven Räumen zeigen, dass die Existenz von Lösungen von Variationsproblemen für konvexe Funktionale garantiert werden kann.

Sei X ein normierter Raum und X' der Dualraum von X , d.h. X' ist der Raum aller stetigen linearen Abbildungen $f : X \rightarrow \mathbb{K}$

$$X' := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ stetig und linear}\} \tag{3.6}$$

³wird teilweise auch als Lemma von Sobolev bezeichnet.

⁴Die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ heißt Lipschitz-Gebiet, falls Ω offen ist und der Rand $\partial\Omega$ lokal in einer geeigneten Richtung der Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion ist; für weitere Ausführungen siehe Werner (2005).

Definition 11. (Schwache Topologie):

Sei X ein normierter Raum und X' sein Dualraum, so wird die Initialtopologie von X bzgl. X' als schwache Topologie bezeichnet.

Bemerkung 3. Die schwache Topologie in Banachräumen ist demnach die Topologie, bzgl. derer alle linearen Funktionale stetig sind.

Definition 12. (Schwache Konvergenz)

Sei X ein normierter Raum. Eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ konvergiert schwach gegen $x \in X$ (d.h. in der schwachen Topologie von X), genau dann, wenn für alle $f \in X'$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

Notation: $x_n \rightharpoonup x$.

Satz 7. (Satz von Banach-Steinhaus)⁵

Seien X, Y normierte Räume, X vollständig und damit ein Banachraum und $\{u_k\}$ eine Folge in $L(X, Y)$. Falls nun $\sup_k \|u_k x\| < \infty \forall x \in X$ gilt, so gilt sogar

$$\sup_k \|u_k\| < \infty. \tag{3.7}$$

Beweis. siehe Werner (2005), § IV.2.

Aufgrund des Satzes von Banach-Steinhaus ergeben sich die folgenden hilfreichen Eigenschaften:

Satz 8. (Abschätzung der Norm des schwachen Grenzwertes)

Sei H ein Hilbertraum und $x_n \rightharpoonup x$. Dann gilt

- (i) $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$
- (ii) Aus $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq \|x\|$ folgt $x_n \rightarrow x$.

Beweisidee. folgt über den Satz von Banach-Steinhaus.

⁵Wird in der Literatur auch als „Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit“ bezeichnet, siehe Werner (2005), S.141.

Weiterhin gelten die folgenden Eigenschaften:

- $u_k \rightarrow u \Rightarrow u_k \rightharpoonup u \forall \{u_k\} \subset X$.
- Falls gilt $\dim X < \infty$, dann gilt auch

$$u_k \rightarrow u \Leftrightarrow u_k \rightharpoonup u. \quad (3.8)$$

Nun kann man zeigen, dass in reflexiven Banachräumen jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge besitzt. Dies ergibt sich größtenteils aus dem sog. Cantorschen Diagonalverfahren, welches z.B. auch im Beweis des Satzes von Arzelà-Ascoli verwendet wird.

Satz 9. (*Schwache Folgenkompaktheit*)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Dann gilt die folgende Äquivalenz:

X ist reflexiv \iff Jede beschränkte Folge besitzt eine schwach konvergente Teilfolge

Beweis. Beweis skizziert nach Werner (2005), S.107f.

Zunächst nehmen wir an, X sei separabel,⁶ und damit auch sein Dualraum X' . Sei $X' = \overline{\{x'_1, x'_2, x'_3, \dots\}}$. Weiterhin sei mit $\{x_n\}$ eine beschränkte Folge in X gegeben. Mit Hilfe des Cantorschen Diagonalverfahrens⁷ ist man nun in der Lage, eine Teilfolge $\{y_n\}$ zu finden, so dass $(x'_i(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\forall i$. Anschließend wird gezeigt, dass $(x'(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\forall x' \in X'$. Mit Hilfe der Abschätzung der Norm des schwachen Grenzwertes (siehe Satz 8) kann man nun die schwache Konvergenz der Folge $\{y_n\}$ zeigen. Bisher wurde die Behauptung nur für einen separablen Raum X gezeigt.

Sei X nun ein beliebiger, reflexiver Raum und $\{x_n\}$ eine beschränkte Folge in X . Y wird definiert als $Y := \overline{\{x_1, x_2, x_3, \dots\}}$ und können somit zeigen, dass Y separabel und reflexiv ist. Hieraus folgt aus dem bisher bewiesenen ersten Teil die Behauptung. \square

⁶Ein Raum X heißt separabel, falls eine abzählbare, dichte Teilmenge von X existiert. Die Räume $L^p(\Omega)$ und $H^{k,p}(\Omega)$ sind separabel für $1 \leq p < \infty$ und $k \geq 0$.

⁷siehe z.B. auch im Beweis des Satzes von Arzelà-Ascoli.

Der vorangegangene Satz der schwachen Kompaktheit ist ein Spezialfall des Satzes von Banach-Alaoglu. Hier die allgemeine Fassung.

Satz 10. (Satz von Banach-Alaoglu)⁸

Die abgeschlossene Einheitskugel $B_{X'} := \{f \in X' : \|f\|_{X'} \leq 1\}$ eines Banachraumes X ist bzgl. der schwach-* -Topologie $\sigma(X', X)$ stets kompakt.

Für einen Beweis siehe Werner (2005).

Bemerkung zum Satz von Banach-Alaoglu:

- Mit der schwach-* -Topologie wird die größte Topologie bezeichnet, bzgl. derer alle Abbildungen $(\varphi_x)_{x \in X}$ stetig sind. Sie wird oft auch Topologie der punktwweisen Konvergenz auf X genannt und wird meist mit $\sigma(X', X)$ bezeichnet.⁹
- Aus dem Satz von Riesz folgt, dass die abgeschlossene Einheitskugel $B_{X'}$ in einem normierten Raum X genau dann bzgl. der Norm-Topologie kompakt ist, wenn $\dim X < \infty$ gilt. Gilt jedoch $\dim X = \infty$ so gilt auch $\dim X' = \infty$ und damit wäre $B_{X'}$ in keinem Fall kompakt in der starken Topologie. Der Satz von Banach-Alaoglu liefert uns allerdings Kompaktheit der abgeschlossenen Einheitskugel $B_{X'}$ in der schwach-* -Topologie von Banachräumen und ist somit ein zentraler Satz der Funktionalanalysis.
- X ist reflexiv $\iff B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ kompakt bzgl. $\sigma(X, X')$.

Desweiteren benötigen wir noch das folgende Lemma über die schwache Abgeschlossenheit von Banachräumen als Werkzeug für den Beweis des Existenzsatzes.

Satz 11. (Abschluß konvexer Mengen)

Sei X ein Banachraum und $A \subseteq X$ konvex. Dann gilt:

$$A \text{ ist abgeschlossen} \iff A \text{ ist schwach abgeschlossen.} \tag{3.9}$$

Beweis. siehe Ruzicka (2007), S.81.

⁸siehe Werner (2005), S.409. Wird teilweise in der Literatur auch als Satz von Alaoglu-Bourbaki bezeichnet.

⁹siehe Werner (2005), §VIII.3.

3.2.3. Koerzivität

Um zu beweisen, dass ein Funktional $I(x(t))$ ein Minimum auf Φ annimmt, muss zunächst bekannt sein, dass $I(x)$ nach unten beschränkt ist. Allerdings ist dies nicht genug um die Existenz eines Minimierers zu beweisen. Z.B. ist die Funktion $f(x) = e^x$ zwar nach unten beschränkt durch $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ und es gilt $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$, allerdings wird das Infimum der Funktion auf ganz \mathbb{R} nicht angenommen. Eine Möglichkeit zu garantieren, dass eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ihr Minimum erreicht, wäre zu zeigen, dass $f(x) \rightarrow +\infty$ für $|x| \rightarrow +\infty$ gilt. Überträgt man diese Idee auf das Funktional $I(x)$, so nimmt man an, dass $I(x(t)) \rightarrow +\infty$ für $|x(t)| \rightarrow +\infty$ gilt. Insbesondere nehmen wir an, dass die folgende Koerzivitatsbedingung gilt:

Definition 13. (Koerzivität)

Der Integrand f eines Funktionalen erfüllt die Koerzivitatsbedingung mit Ordnung $q \in (1, \infty)$, falls gilt

$$\exists \alpha > 0, \beta > 0 \text{ mit } f(x, z, p) \geq \alpha|p|^q - \beta \quad \forall (x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad (3.10)$$

Bemerkung 4. Eine alternative, jedoch schwächere Definition von Koerzivität wäre die folgende: Die Funktion f heißt koerziv, falls für alle Folgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \infty$ gelte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty.$$

Falls der Integrand $f(t, x(t), \dot{x}(t))$ die Koerzivitatsbedingung (3.10) erfüllt, so gilt für das Funktional $I(x(t))$:

$$I(x(t)) = \int_{\Omega} f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \geq \int_{\Omega} \alpha|\dot{x}(t)|^q dt - \beta|\Omega|.$$

Abschließend wird noch die Definition der Unterhalbstetigkeit eingeführt, welche für das Funktional zusätzlich gefordert werden muss, um die Existenz einer Lösung zu garantieren.

Definition 14. (*Unterhalbstetigkeit*)

Sei X ein Banachraum, $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ und $\{u_k\} \subset X$. Dann heißt die Funktion F

- *unterhalbstetig, wenn*
 $u_k \rightarrow u \text{ in } X \Rightarrow F(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(u_k).$
- *schwach folgenstetig, wenn*
 $u_k \rightarrow u \text{ in } X \Rightarrow F(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(u_k).$
- *schwach folgenunterhalbstetig, wenn*
 $u_k \rightarrow u \text{ in } X \Rightarrow F(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(u_k).$

Satz 12. (*Äquivalenz bei konvexen Funktionalen*)

Sei $X^* \subset X$ eine konvexe Teilmenge eines Banachraums X und $F : X^* \rightarrow (-\infty, \infty]$ konvex. Dann gilt

$$F \text{ ist unterhalbstetig} \iff F \text{ ist schwach unterhalbstetig.} \quad (3.11)$$

Beweis. \implies : siehe Ruzicka (2007), S.68.

\impliedby : trivial, da gilt $u_k \rightarrow u \Rightarrow u_k \rightarrow u$. □

3.3. Existenzsätze

Nachdem nun alle notwendigen und grundlegenden Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis ausführlich mit ihren wichtigen Eigenschaften beschrieben wurden, können wir nun mit der Formulierung und dem Beweis des Existenzsatzes beginnen. Zunächst möchten wir aber eine Skizze der direkten Methode der Variationsrechnung darlegen, um einen Überblick zu geben, wie man die Lösung eines Variationsproblems in einer abstrakten Situation erhält.

Skizze der direkten Methode der Variationsrechnung

1. Zunächst wählt man eine geeignete Klasse von Funktionen $\Phi \neq \emptyset$ auf der das Variationsintegral $I(u(x))$ wohldefiniert ist und innerhalb welcher man $I(u(x))$ minimieren und damit lösen möchte.
2. Anschliessend zeigt man, dass $I(u(x))$ nach unten beschränkt ist, d.h. dass gilt

$$\exists m \in \mathbb{R} : \inf_{u \in \Phi} I(x) = m. \quad (3.12)$$

3. Dann wählt man eine Minimalfolge für das Funktional I nach Definition (*.*), d.h. eine Folge $\{u_k\} \subset \Phi$ für die gilt

$$I(u_k) \rightarrow m \quad (k \rightarrow \infty). \quad (3.13)$$

4. Nun folgt mit Satz 9, dass eine schwach konvergente Teilfolge $\{u_{k_j}\} \subset \{u_k\}$ existiert, wobei $u_{k_j} \rightharpoonup u$ in $W^{1,q}$.
5. Fordert man zusätzlich die Unterhalbstetigkeit des Variationsintegrals I gemäß Definition 12, so kann man die Existenz einer Lösung über die folgende Gleichungskette zeigen:

$$-\infty < \inf_{u \in \Phi} I(u(x)) \leq I(u(x)) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} I(u_{k_j}) = \inf_{u \in \Phi} I(u(x)). \quad (3.14)$$

Aus der Ungleichungskette folgte nun Gleichheit und es gilt

$$I(u(x)) = \inf_{u \in \Phi} I(u(x)). \quad (3.15)$$

Hiermit ist das Variationsproblem gelöst und die Existenz einer Lösung bewiesen.

Die Forderung der schwachen Kompaktheit und die Wahl einer schwach-konvergenten Teilfolge ist oft leichter in einer schwächeren Topologie. Umgekehrt ist schwache Unterhalbstetigkeit des Funktional in einer stärkeren Topologie leichter zu fordern. Durch diese gegenläufigen Ergebnisse ist die Wahl des Grundraums oft schwierig, wir finden allerdings die perfekte Balance in der schwachen Topologie der Sobolevräume $W^{1,q}(\Omega)$.

Definition 15. (*Minimalfolgen*)

Sei das Infimum des Funktional gegeben durch $m := \inf_{x \in \Phi} I(x(t)) \in \mathbb{R}$, so heißt eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in \Phi \forall n \in \mathbb{N}$ Minimalfolge, falls gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(x_n) = m. \quad (3.16)$$

Bevor nun der zentralen Existenzsatz für konvexe Variationsprobleme bewiesen werden kann, wird noch die Formulierung des Satzes von Tonelli benötigt, welcher die schwache Unterhalbstetigkeit des Variationsintegrals unter bestimmten Bedingungen garantiert.

Lemma 1. (*Satz von Egoroff*)¹⁰

Seien $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ und u messbare Funktionen und Ω eine messbare Menge mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $|\Omega| < \infty$. Desweiteren gelte $u_k \rightarrow u$ fast überall auf Ω . Dann gilt $\forall \epsilon > 0 \exists$ meßbare Menge $R_\epsilon \subset \Omega$ mit

1. $|\Omega - R_\epsilon| \leq \epsilon$
2. $u_k \rightarrow u$ gleichmäßig auf R_ϵ

Satz 13. (*Satz von Tonelli*)

Ist $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, nach unten beschränkt und $f(t, x, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvex $\forall x \in \Omega, z \in \mathbb{R}$, so gilt:

$I(x)$ ist schwach unterhalbstetig auf $W^{1,q}(\Omega)$, $1 < q < \infty$.

¹⁰vgl. Evans (2010), S.731.

3. Existenztheorie

Beweis. Sei $u_k \rightharpoonup u$ in $W^{1,q}(\Omega)$ und definiere $l := \liminf_{k \rightarrow \infty} I(u_k) > -\infty$.

Gelte o.B.d.A. $l < \infty$, sonst wäre der Beweis trivial.

Wegen kompakter Einbettung gilt durch Satz 6: $u_k \rightarrow u$ in $L^q(\Omega)$.

\Rightarrow für weitere Teilfolgen $\{u_{k_j}\} \subset \{u_k\}$ gilt $u_{k_j} \rightarrow u$ fast überall in Ω .¹¹

Da $u_{k_j} \rightarrow u$ fast überall in Ω folgt mit dem Satz von Egoroff (siehe Lemma 1):

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists$ meßbare Menge $R_\epsilon \subset \Omega$ mit $|\Omega - R_\epsilon| \leq \epsilon$ und

$$u_{k_j} \rightarrow u \text{ gleichmäßig auf } R_\epsilon.$$

Wir definieren $S_\epsilon := \{x \in \Omega : |u(x)| + |\nabla u(x)| \leq \frac{1}{\epsilon}\}$.

$\Rightarrow |\Omega - S_\epsilon| \rightarrow 0$ ($\epsilon \rightarrow 0$).

Desweiteren definieren wir $T_\epsilon := R_\epsilon \cap S_\epsilon \Rightarrow |\Omega - T_\epsilon| \rightarrow 0$ ($\epsilon \rightarrow 0$).

Da f nach unten beschränkt ist, sei o.B.d.A. $f \geq 0$ (andernfalls betrachte $\tilde{f} = f + \beta \geq 0$).

$$\Rightarrow I(u_k) = \int_{\Omega} f(t, u_k(t), \nabla u_k(t)) dt \stackrel{f \geq 0}{\geq} \int_{T_\epsilon} f(t, u_k, \nabla u_k) dt \quad (3.17)$$

$$\stackrel{f \text{ konvex}}{\geq} \int_{T_\epsilon} f(t, u_k, \widehat{\nabla u}) dt + \int_{T_\epsilon} \underbrace{\nabla_p f(t, u_k, \nabla u)}_{\text{konv.glm.auf } T_\epsilon} (\nabla u_k - \nabla u) dt \quad (3.18)$$

$\Rightarrow l = \lim I(u_k) \geq \int_{T_\epsilon} f(t, u, \nabla u) dt + 0$, da $\nabla_p f(t, u_k, \nabla u) \rightarrow \nabla_p f(t, u, \nabla u)$ auf T_ϵ gleichmäßig konvergiert, also in $L^q(T_\epsilon)$; und $\nabla u_k \rightarrow \nabla u$ in $L^q(T_\epsilon)$.

$\Rightarrow l \geq \int_{T_\epsilon} f(t, u, \nabla u) dt \quad \forall \epsilon > 0$.

Mit monotoner Konvergenz gilt dann:

$$l \geq \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) dt = I(u(t)).$$

Mit der Definition von $l = \liminf_{k \rightarrow \infty} I(u_k)$ folgt nun die schwache Unterhalbstetigkeit von $I(u)$ und damit die Behauptung. \square

¹¹folgt aus Korollar nach Satz von Riesz-Fisher, siehe Reed und Simon (1980), S.19.

Bemerkung 5. (zu Satz von Tonelli)¹²

1. Gilt analog für $n > 1$.
2. Die Umkehrung gilt ebenfalls für $n = 1$:
 Gilt $I(x)$ schwach unterhalbstetig auf $W^{1,q}(\Omega)$ für $q \in (1, \infty)$. Dann gilt
 $f(t, x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist konvex $\forall x \in \bar{\Omega} \forall z \in \mathbb{R}$.

Nun folgt der zentrale Existenzsatz für konvexe Variationsprobleme, der unter den gegebenen Bedingungen die Existenz einer Lösung für ein gegebenes Variationsproblem vom Typ (MP) garantiert.

Satz 14. (Existenzsatz für konvexe Funktionale)

Für das Minimierungsproblems (MP) eines Funktionals $\int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \min$ gilt:
 Ist $f : \Phi \rightarrow (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und koerziv und $\Phi \neq \{\}$, dann gilt:

$$\exists \bar{x}(t) \in \Phi : I(\bar{x}(t)) = \min_{x(t) \in \Phi} I(x(t))$$

Gilt $f : \Phi \rightarrow (-\infty, \infty]$ strikt konvex, so ist die Lösung $\bar{x}(t)$ sogar eindeutig.

Beweis. Der Beweis des Existenzsatzes wird zunächst in drei Teile untergliedert. Zuerst wählen wir eine Minimalfolge $\{u_k\}$, anschließend zeigen wir dass diese in $W^{1,q}(\Omega)$ beschränkt ist. Im dritten Teil beweisen wir die Existenz einer Teilfolge $\{u_{k_j}\} \subset \{u_k\}$, welche gegen die Lösung des Variationsproblems konvergiert.

- i) Wir definieren $m := \inf_{w \in \Phi} I(w) < \infty$ (da sonst Beweis trivial).
 Sei $\{u_k\}$ eine Minimalfolge mit $I(u_k) \rightarrow m$.
- ii) Gelte o.B.d.A. $f \geq 0$, sonst betrachten wir auch hier den modifizierten Integrand
 $\tilde{f} = f + \beta \geq 0$.

$$\Rightarrow I(w) \geq \alpha \|\nabla w\|_{L^q(\Omega)}^q < \infty$$

Daher gilt auch für die Minimalfolge $\{u_k\}$:

$$\sup_k \|\nabla u_k\|_{L^q(\Omega)} < \infty.$$

¹²Beweis siehe Evans (2010), §8.2.4.

Sei $w \in \Phi$ beliebig $\Rightarrow u_k - w \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

Mit der Poincaré-Ungleichung (Satz 5) folgt nun:

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{L^q} &\leq \|u_k - w\|_{L^q} + \|w\|_{L^q} \\ &\leq c\|\nabla u_k - \nabla w\|_{L^q} + c \leq c \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \{u_k\} \text{ beschränkt in } W^{1,q}(\Omega) \end{aligned}$$

iii) Da $\{u_k\}$ in $W^{1,q}(\Omega)$ beschränkt ist, folgt mit Satz 9:

$$\exists \text{ Teilfolge } \{u_{k_j}\} \text{ von } \{u_k\} \text{ mit } u_{k_j} \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,q}(\Omega).$$

Nun gilt es noch zu zeigen, dass $u \in \Phi$ gilt, d.h. $u|_{\partial\Omega} = g$.

Zunächst gilt nach dem Satz über den Abschluss konvexer Mengen (Satz 11), dass $W_0^{1,q}(\Omega)$ ein schwach abgeschlossener Teilraum von $W^{1,q}(\Omega)$ ist.

$$\Rightarrow u - w \in W_0^{1,q}(\Omega) \Rightarrow u|_{\partial\Omega} = w|_{\partial\Omega} = g$$

Mit dem Satz von Tonelli (Satz 12) folgt nun, dass das Funktional $I(u)$ schwach unterhalbstetig ist und somit gilt

$$I(u) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} I(u_{k_j}) = m.$$

$$\stackrel{u \in \Phi}{\Rightarrow} I(u) = m = \min_{w \in \Phi} I(w).$$

Wir erkennen nun, dass das Infimum des Funktionals $I(u)$ auf dem zulässigen Bereich Φ unter den gegebenen Bedingungen wirklich angenommen wird und somit das Minimum existiert. □

Blicken wir zurück auf unser Einführungsbeispiel in Abschnitt 3.1, so lässt sich nun erkennen, dass der Existenzsatz hierauf nicht angewandt werden kann. Der Grund liegt in der fehlenden Konvexitätseigenschaft des Integrands $f(t, x, \dot{x})$.

4. Direkte Methoden der Variationsrechnung

In der Variationsrechnung werden in der Praxis meist numerische Methoden verwendet um die Extremale eines Funktionals hinreichend genau zu approximieren. Man versucht den zunächst ∞ -dimensionalen Funktionenraum auf einen Funktionenraum endlicher Dimension zu beschränken, damit das Funktional zu einer Funktion von endlich vielen Parametern wird. Diese kann man anschließend unter gewissen Voraussetzungen minimieren. Es wird weiterhin das allgemeine Minimierungsproblem (*MP*) behandelt:

$$I(x(t)) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \min_{x(t) \in \Phi} \quad (\text{MP})$$

wobei die Randbedingungen $x(a) = x_1$ und $x(b) = x_2$ zunächst gegeben sind. Anschließend werden wir aber auch darlegen, wie man Variationsprobleme mit freien Randwerten, d.h. mit natürlichen Randbedingungen oder mit transversalen Randbedingungen numerisch lösen kann. Für ein gegebenes Funktional ist eine Funktionenfolge $\{y_n(t)\} \in \Phi \forall n \in \mathbb{N}$ gesucht, welche gegen die exakte Lösung $\bar{x}(t)$ des Variationsproblems konvergiert. Das bedeutet

$$y_n(t) \rightarrow \bar{x}(t) \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{wobei } I(\bar{x}(t)) = \inf_{x(t) \in \Phi} I(x(t)). \quad (4.1)$$

Es werden zwei verschiedene Möglichkeiten beschrieben, diese Minimalfolge $\{y_n(t)\}$ zu konstruieren. Zunächst die Ritz'sche Methode, welche von Walter Ritz im Jahre 1909 erstmals veröffentlicht wurde.¹ Hier erfolgt die Konstruktion der $\{y_n(t)\}$ über Polynome, welche die gegebenen Randbedingungen erfüllen. Auf dieser Klasse findet anschließend eine endlich-dimensionale Minimierung des Funktionals statt, um die Näherungslösung $y_n(t)$ zu erhalten.

¹siehe Ritz (1909).

Bei dem in Abschnitt 4.2 dargestellten Endlichen Differenzenverfahren versuchen wir die Lösung $\bar{x}(t)$ des Variationsproblems über einen endlich-dimensionalen Polygonzug anzunähern. Hierbei wird bei gegebenen Randbedingungen das Intervall $[a, b]$ in $n + 1$ Teilintervalle zerlegt, auf welchem ein Polygonzug mit n freien Variablen hinsichtlich des Variationsproblems optimiert wird.

Beide Verfahren haben ihre Vor- und Nachteile, auf die wir später u.a. durch Beispiele genauer eingehen werden. Zunächst wird jedes der Verfahren separat beschrieben, das Modell erläutert, als auch auf die Implementierung in Matlab genau eingegangen. Anschließend wird die Anwendung der eigens implementierten Matlab-Funktionen erklärt und dargestellt. Im letzten Abschnitt von Kapitel 4 werden wir die Konvergenzgeschwindigkeit der durch die Verfahren erstellten Funktionenfolgen $\{y_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \Phi$ nachweisen und sie untereinander vergleichen.

4.1. Die Ritz'sche Methode

4.1.1. Das mathematische Modell

Bei der Ritz'schen Methode² versuchen wir, die Lösungsfunktion $\bar{x}(t)$ eines Funktionals $I(x(t))$ durch eine Folge von Vergleichsfunktionen $\{y_n(t)\}$ zu approximieren, welche ebenfalls die notwendigen Randbedingungen erfüllen. Demnach lässt sich $y_n(t)$ darstellen als

$$y_n(t) = \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(t) \quad (4.2)$$

wobei $\varphi_0(t)$ die Randbedingungen $\varphi_0(a) = x_1$ und $\varphi_0(b) = x_2$ des Funktionals erfüllt und für $\varphi_k(t)$ gilt für $k \geq 1$ jeweils $\varphi_k(a) = 0$ und $\varphi_k(b) = 0$. Somit erfüllt auch die Näherungsfunktion $y_n(t)$ des Extremals $\bar{x}(t)$ die geforderten Randbedingungen und es gilt $y_n(a) = x_1$ und $y_n(b) = x_2$.

Auf diese Art und Weise lässt sich die Lösung des Funktionals näherungsweise darstellen als

$$\bar{x}(t) \approx \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \varphi_k(t) = y_n(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (4.3)$$

wobei $y_n(t)$ nun nur noch eine Funktion eines n -dimensionalen Funktionenraums ist. Falls die Folge $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, so erhalten wir die exakte Lösung $\bar{x}(t)$ mittels Grenzübergang für $n \rightarrow \infty$. Führen wir den Grenzübergang nicht durch, so erhält man im Allgemeinen eine hinreichend genaue Näherungslösung für $\bar{x}(t)$. Das Problem der Minimierung wurde nun von einem ∞ -dimensionalen Funktionenraum in einen n -dimensionalen Funktionenraum übertragen, da jede Funktion $y_n(t, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ eine Funktion der Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ist, welche mittels Standardtechniken der Analysis bestimmt werden können.

Das Ziel ist nun $\int_a^b f(t, y_n(t), \dot{y}_n(t)) dt$ mit den Parametern $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ zu minimieren. Definiert man mit

$$\mathfrak{S}_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \int_a^b f(t, y_n(t), \dot{y}_n(t)) dt \quad (4.4)$$

²auch Galerkin-Verfahren genannt, siehe Kielhöfer (2010), S.211f.

eine Diskretisierung des Funktionals in Abhängigkeit von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Das modifizierte Funktional $\mathfrak{S}_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ lässt sich nun auf diesem endlich-dimensionalen Funktionenraum minimieren.

Um das Minimum des Funktionals zu berechnen, bestimmen wir die Nullstellen der Funktionen $\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \mathfrak{S}_n, \dots, \frac{\partial}{\partial \alpha_n} \mathfrak{S}_n$. Aus diesem Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ lassen sich die Parameter α_k , $k = 1, \dots, n$ nun exakt bestimmen. Anschließend ist die Funktionenfolge $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ wohldefiniert und somit auch die hinreichend genaue Lösung $y_n(t) \approx \bar{x}(t)$.

Bei der Implementierung des Ritz'schen Verfahrens verwenden wir das mehrdimensionale Newton-Verfahren für die Bestimmung der Nullstellen der Funktionen $\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \mathfrak{S}_n, \dots, \frac{\partial}{\partial \alpha_n} \mathfrak{S}_n$. Die mehrdimensionale Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definieren wir durch

$$g(\alpha) := \begin{pmatrix} g_1(\alpha) \\ g_2(\alpha) \\ \vdots \\ g_n(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \mathfrak{S}_n(\alpha) \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \mathfrak{S}_n(\alpha) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_n} \mathfrak{S}_n(\alpha) \end{pmatrix}$$

wobei α der n -dimensionale Vektor $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ist. Ausgangspunkt des Newton-Verfahrens in \mathbb{R}^n ist die Fixpunktgleichung

$$x = x - (J(x))^{-1} g(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

wobei $J(\alpha)$ die Jacobi-Matrix von $g(\alpha)$ ist:

$$J(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial \alpha_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial \alpha_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial g_n}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial \alpha_n} \end{pmatrix}.$$

Über die Iteration $\alpha^{n+1} := \alpha^n - (J(\alpha^n))^{-1}g(\alpha^n)$ mit einem geeigneten Startvektor $\alpha^0 \in \mathbb{R}^n$ kann die Nullstelle $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*)$ der Funktion $g(\alpha)$ bestimmt werden. Wir erhalten somit die exakte Form der Näherungslösung durch Einsetzen der soeben bestimmten $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*$.

$$y_n(t) = \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^n \alpha_k^* \varphi_k(t). \quad (4.5)$$

Eine geeignete Möglichkeit die $\varphi_k(t)$ zu wählen wäre

$$\varphi_0(t) := \frac{x_2 - x_1}{b - a}(t - a) + x_1 \quad (4.6)$$

$$\varphi_k(t) := (t - a)(t - b)^k, \quad k \geq 1. \quad (4.7)$$

$\varphi_0(t)$ beschreibt eine Gerade, welche die Punkte (a, x_1) und (b, x_2) verbindet, und $\varphi_k(t)$ ist ein Polynom $(t + 1)$ -ter Ordnung. Auf diese Art und Weise können wir garantieren, dass die Funktion $y_n(t)$ die notwendigen Randbedingungen erfüllt, denn es gilt nun $\varphi_0(a) = x_1$, $\varphi_0(b) = x_2$ und $\varphi_k(a) = 0$, $\varphi_k(b) = 0$ für $k \geq 1$ und damit $y_n(a) = x_1$ und $y_n(b) = x_2 \forall n \in \mathbb{N}$.

Desweiteren lassen sich in das bisherige Modell sowohl die natürlichen Randbedingungen als auch die Transversalitätsbedingungen integrieren.

Ritz'sche Methode mit natürlichen Randbedingungen

Nun sollen die natürlichen Randbedingungen wie in Abschnitt (2.2.2) auch für das Ritz'sche Verfahren angewandt werden. Seien o.B.d.A. die Randbedingungen für den rechten Rand, d.h. b und $x(b) = x_2$ gegeben und natürliche Randbedingungen für den linken Rand, d.h. a gegeben und $x(a)$ als freie Variable, so muss zusätzlich Gleichung (2.18) erfüllt werden:

$$f_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))|_{t=a} = 0.$$

Um dies praktisch im Ritz'schen Verfahren anzuwenden, führen wir zunächst eine weitere Variable x_a ein. Die Konstruktion der Näherungslösung $y_n(t) = \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(t)$

ist nun neben $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ zusätzlich von der Variablen x_a abhängig. Desweiteren ergibt sich durch die natürliche Randbedingung für die Näherungslösung $y_n(t)$ ebenfalls eine weitere Gleichung:

$$f_{\dot{x}}(t, y_n(t), \dot{y}_n(t))|_{t=a} = 0. \quad (4.8)$$

Sofern das Gleichungssystem mit nun $n + 1$ Variablen und $n + 1$ Gleichungen lösbar ist, ergibt sich $y_n(t)$ durch Einsetzen der Parameter $\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*$ sowie $x_1 = x_a$:

$$y_n(t) = \varphi_0(t)|_{x_1=x_a} + \sum_{k=1}^n \alpha_k^* \varphi_k(t) \quad (4.9)$$

Die mehrdimensionale Funktion $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ sieht jetzt wie folgt aus:

$$g(\alpha, x_a) := \begin{pmatrix} g_1(\alpha, x_a) \\ g_2(\alpha, x_a) \\ \vdots \\ g_n(\alpha, x_a) \\ g_{n+1}(\alpha, x_a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \mathfrak{S}_n(\alpha, x_a) \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \mathfrak{S}_n(\alpha, x_a) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_n} \mathfrak{S}_n(\alpha, x_a) \\ f_{\dot{x}}(a, y_n(a), \dot{y}_n(a)) = 0 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Um die Nullstellen der Funktion g zu berechnen, verfahren wir wie gehabt mit dem mehrdimensionalen Newton-Verfahren. Die Jacobi-Matrix $J(\alpha, x_a)$ von $g(\alpha, x_a)$ ist nun gegeben durch

$$J(\alpha, x_a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial \alpha_n} & \frac{\partial g_1}{\partial x_a} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial \alpha_n} & \frac{\partial g_2}{\partial x_a} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial g_n}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial \alpha_n} & \frac{\partial g_n}{\partial x_a} \\ \frac{\partial g_{n+1}}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial g_{n+1}}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial g_{n+1}}{\partial \alpha_n} & \frac{\partial g_{n+1}}{\partial x_a} \end{pmatrix}.$$

Analog lassen sich die Nullstellen der Funktion g bestimmen und das Newton-Verfahren liefert Näherungswerte für $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*$ und für x_a und damit die Näherungslösung $y_n(t)$.

Analog wird im Falle von natürlichen Randbedingungen am rechten Ende vorgegangen. Sofern am rechten und am linken Rand natürliche Randbedingungen umgesetzt werden sollen, so werden zwei zusätzliche Variablen x_a und x_b deklariert, aber es müssten auch zwei zusätzliche Gleichungen erfüllt werden, sodass das Gleichungssystem in diesem Fall $n + 2$ Variablen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sowie x_a und x_b und $n + 2$ Gleichungen enthalten würde.

Ritz'sche Methode mit Transversalitätsbedingungen

Auch bei einem Variationsproblem mit transversalen Randbedingungen betrachten wir zunächst nur das Vorliegen der Bedingung an einem Rand. Bei entsprechenden Modifikationen wird analog verfahren.

Sei nun ein Variationsproblem mit Transversalitätsbedingung am linken Rand gegeben, d.h. es ist lediglich die Funktion $\psi_a(a)$ bekannt, sodass $x(a) = \psi_a(a)$ gilt. Am rechten Rand seien feste Randbedingungen b und $x(b) = x_2$ gegeben. Neben den bisherigen Variablen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ist hier die zusätzliche freie Variable a gegeben und die Näherungslösung $y_n(t)$ muss gemäß (2.20) die folgende Gleichung erfüllen:

$$f(t, y_n(t), \dot{y}_n(t)) + f_{\dot{x}}(t, y_n(t), \dot{y}_n(t))(\dot{\psi}_a(t) - \dot{y}_n(t))|_{t=a} = 0. \quad (4.11)$$

Ähnlich wie im Falle der natürlichen Randbedingungen sind hier $n + 1$ Variablen sowie $n + 1$ Gleichungen gegeben, welche wir mittels mehrdimensionalem Newton-Verfahren lösen können. Wir erhalten nun Werte für $\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*$ und a^* , welche eingesetzt in $y_n(t)$ die Lösung explizit in Abhängigkeit von t darstellen:

$$y_n(t) = \varphi_0(t)|_{a=a^*} + \sum_{k=1}^n \alpha_k^* \varphi_k(t)|_{a=a^*}. \quad (4.12)$$

Beispiel der Ritz'schen Methode

Hier möchten wir an einem einfachen Beispiel die Ritz'sche Methode vollständig durchlaufen. Sei das folgende Variationsproblem mit bekannten Randbedingungen gegeben:

$$I(x) = \int_a^b (\dot{x}^2 - x^2 - 2tx) dt \rightarrow \min, \quad x(0) = x(1) = 0$$

Berechnung der Näherungslösung 2-ten Grades mittels dem Ritz'schen Verfahren:

Als geeignete Funktionen $\varphi_k(t)$ definieren wir aufgrund der gegebenen Randbedingungen die Funktionen $\varphi_0(t) \equiv 0$ und $\varphi_k(t) := t(t-1)^k$. Somit ergibt sich aus (4.3)

$$y_2(t) = \alpha_1 \cdot t(t-1) + \alpha_2 \cdot t(t-1)^2.$$

Eingesetzt in (4.4) gilt

$$\mathfrak{S}_2(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^1 f(t, y_2(t), \dot{y}_2(t)) dt.$$

Integrieren und partielles Differenzieren führt zu einem Gleichungssystem mit den Variablen α_1 und α_2 , welches die folgenden Lösungen besitzt:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \mathfrak{S}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{7}{41}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \mathfrak{S}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \frac{71}{369}$$

Somit ergibt sich eine Näherungslösung für $\bar{x}(t)$ durch

$$y_2(t) = \frac{7}{41}(1-t)t^2 + \frac{71}{369}(1-t)t.$$

4.1.2. Implementierung des Ritz'schen Verfahrens in Matlab

Diese Matlab-Funktion `R.m` generiert als Ausgabe sowohl den minimalen Näherungswert des Funktionals \mathfrak{S}_n , als auch die explizite sowie graphische Darstellung der approximativen Lösung $y_n(t) \approx \bar{x}(t)$ als Ergebnis der Ritz'schen Methode.

Die Funktion `R.m` benötigt die folgenden Input-Parameter:

- f : Der Integrand $f(t, x, \dot{x})$ in Abhängigkeit der Parameter t , x und x_punkt und übergeben in einfachen Hochkommata
- $type_a, type_b, rand_a, rand_b$: Die Angabe der Randbedingungen und deren Parameter sowohl für den linken als auch für den rechten Rand, wobei gilt:
 - $type = 0$: Die Randbedingung ist komplett gegeben, d.h. a und $x(a)$ werden in Vektorform als Parameter $rand_a$ übergeben: $rand_a = [a \quad x(a)]$.
 - $type = 1$: Es werden am jeweiligen Rand die natürlichen Randbedingungen verwendet. Hier wird als Parameter $rand_a$ nur der Randpunkt a übergeben: $rand_a = a$.
 - $type = 2$: Hier wird die Transversalitätsbedingung $x(a) = f(a)$ angewandt und die Funktion $f(a)$ als Parameter übergeben: $rand_a = f(a)'$.
- n : Die Genauigkeit der Näherungslösung $y_n(t)$, welche letztlich ein Polynom vom Grad $n + 1$ sein wird.

4. Direkte Methoden der Variationsrechnung

Listing 4.1.: Die Matlab-Funktion R.m zur Berechnung und Ausgabe einer Näherungslösung durch das Ritz'sche Verfahren

```
1 function [funktionalwert, solution] = R( f, type_a, rand_a, type_b, rand_b, n )
2
3 n;      % Angabe der Genauigkeit
4 f;      % gegebener Integrand
5
6 type_a; type_b; % Typen an den Rändern (Natürliche RB, Transversalität)
7 % type = 1: Randbedingung komplett gegeben, a und x(a)
8 % type = 2: Natürliche Randbedingung bei a gegeben
9 % type = 3: Transversalitätsbedingung: x(a) = f(a) gegeben
10
11 rand_a; rand_b; % Input-Parameter in Abhängigkeit vom Typ
12
13 if ((type_a > 3) | (type_b > 3) | (type_a < 1) | (type_b < 1))
14     disp('Dies ist keine gültige Eingabe für den Typ (1, 2 oder 3)!')
15     disp('Bitte starten Sie das Programm erneut.')
16     return
17 end
18
19 % Deklarieren der symbolischen Variablen
20 syms 'x'; syms 'x_punkt'; syms 't'; syms 'k'; syms 'a'; syms 'b';
21
22 for i=1:n
23     eval(['syms_alpha', num2str(i)])
24 end
25
26 nr_var = n;
27 ta=0; tb=0; xa=0; xb=0;
28 % Zusätzliche Variablen für zusätzliche Gleichungen durch andere Typs
29 switch (type_a)
30     case 1
31         ta = rand_a(1); xa = rand_a(2);
32     case 2
33         eval(['syms_alpha', num2str(n+1)]); % xa_frei
34         ta = rand_a(1);
35         xa = eval(['alpha', num2str(n+1)]);
36         nr_var = nr_var + 1;
37     case 3
38         eval(['syms_alpha', num2str(n+1)]); % ta_frei
39         ta = eval(['alpha', num2str(n+1)]);
40         xa = subs(rand_a, 'a', eval(['alpha', num2str(n+1)]));
41         nr_var = nr_var + 1;
42     otherwise
43         disp('Dies ist keine gültige Eingabe für den Typ (1, 2 oder 3)!')
44         disp('Bitte starten Sie das Programm erneut')
```

```

45     return
46 end
47
48 % Zusätzliche Variablen für zusätzliche Gleichungen durch andere Typs
49 switch (type_b)
50     case 1
51         tb = rand_b(1); xb = rand_b(2);
52     case 2
53         if (type_a == 1)
54             eval(['syms_alpha', num2str(n+1)]); % xb_frei
55             tb = rand_b(1);
56             xb = eval(['alpha', num2str(n+1)]);
57             nr_var = nr_var + 1;
58         end
59         if (type_a == 2)
60             eval(['syms_alpha', num2str(n+2)]); % xb_frei
61             tb = rand_b(1);
62             xb = eval(['alpha', num2str(n+2)]);
63             nr_var = nr_var + 1;
64         end
65     case 3
66         if (type_a == 1)
67             eval(['syms_alpha', num2str(n+1)]); % tb_frei
68             tb = eval(['alpha', num2str(n+1)]);
69             xb = subs(rand_b, 'b', tb);
70             nr_var = nr_var + 1;
71         end
72         if (type_a == 3)
73             eval(['syms_alpha', num2str(n+2)]); % tb_frei
74             tb = eval(['alpha', num2str(n+2)]);
75             xb = subs(rand_b, 'b', tb);
76             nr_var = nr_var + 1;
77         end
78     otherwise
79         disp('Dies ist keine gültige Eingabe für den Typ (1, 2 oder 3)!')
80         disp('Bitte starten Sie das Programm erneut.')
81     return
82 end
83
84 % Konstruktion der geeigneten Funktionen
85 phi_null = (xb-xa)*t/(tb-ta)+xa-ta*(xb-xa)/(tb-ta);
86 phi = (tb-t)*((t-ta)^k);
87
88 g=phi_null;
89 for i=1:n
90     g=g+subs(phi, k, i)*eval(['alpha', num2str(i)]);
91 end
92

```

4. Direkte Methoden der Variationsrechnung

```

93 h1=subs(f,[x x_punkt],[g diff(g,t)]);
94 h2=int(h1,t);
95 h3=subs(h2,t,tb)-subs(h2,t,ta);
96
97 F=x*[1:nr_var];
98 G=meshgrid(F,F);
99 dG=G;           % Erzeugung einer (nr_var)x(nr_var)-Matrix
100
101 for i=1:n
102     G(i,1) = diff(h3,eval(['alpha',num2str(i)]));
103 end
104
105 % Zusätzliche Gleichungen aufgrund der Typen
106 switch (type_a)
107     case 1
108         switch (type_b)
109             case 2
110                 G((n+1),1) = subs(subs(diff(f,x_punkt),[x x_punkt],[g diff(g,t)]),t,tb);
111             case 3
112                 G((n+1),1) = subs(subs(f,[x x_punkt],[g diff(g,t)]),t,tb) + ...
113                     subs(subs(diff(f,x_punkt),[x x_punkt],[g diff(g,t)]),t,tb)* ...
114                     (subs(diff(xa,eval(['alpha',num2str(n+1)])), ...
115                         eval(['alpha',num2str(n+1)]),tb) - subs(diff(g,t),t,tb))
116         end
117     case 2
118         switch (type_b)
119             case 1
120                 G((n+1),1) = subs(subs(diff(f,x_punkt),[x x_punkt],[g diff(g,t)]),t,ta);
121             case 2
122                 G((n+1),1) = subs(subs(diff(f,x_punkt),[x x_punkt],[g diff(g,t)]),t,ta);
123                 G((n+2),1) = subs(subs(diff(f,x_punkt),[x x_punkt],[g diff(g,t)]),t,tb);
124         end
125     case 3
126         switch (type_b)
127             case 1
128                 G((n+1),1) = subs(subs(f,[x x_punkt],[g diff(g,t)]),t,ta) + ...
129                     subs(subs(diff(f,x_punkt),[x x_punkt],[g diff(g,t)]),t,ta)* ...
130                     (subs(diff(xa,eval(['alpha',num2str(n+1)])), ...
131                         eval(['alpha',num2str(n+1)]),ta) - subs(diff(g,t),t,ta));
132             case 3
133                 G((n+1),1) = subs(subs(f,[x x_punkt],[g diff(g,t)]),t,ta) + ...
134                     subs(subs(diff(f,x_punkt),[x x_punkt],[g diff(g,t)]),t,ta)* ...
135                     (subs(diff(xa,eval(['alpha',num2str(n+1)])), ...
136                         eval(['alpha',num2str(n+1)]),ta) - subs(diff(g,t),t,ta));
137                 G((n+2),1) = subs(subs(f,[x x_punkt],[g diff(g,t)]),t,tb) + ...
138                     subs(subs(diff(f,x_punkt),[x x_punkt],[g diff(g,t)]),t,tb)* ...
139                     (subs(diff(xa,eval(['alpha',num2str(n+1)])), ...
140                         eval(['alpha',num2str(n+1)]),tb) - subs(diff(g,t),t,tb));

```

4. Direkte Methoden der Variationsrechnung

```
141     end
142 end
143
144 for i=1:nr_var
145     for j=1:nr_var
146         dG(i,j) = diff(G(i,1),eval(['alpha',num2str(j)]));
147     end
148 end
149
150 G = G(1:nr_var,1);
151
152
153 % mehrdimensionales Newton-Verfahren um Nullstellen zu finden
154
155 m = 10; % Anzahl der Iterationsschritte
156
157 newton1 = [1:m];
158 newton2 = [1:nr_var];
159 newton = meshgrid(newton1,newton2);
160
161 % Startvektor (0,0,...,0)
162 for i=1:nr_var
163     newton(i,1)=0;
164 end
165
166 % Berechnung der m Iterationsschritte durch
167 %  $x(n+1) = x(n) - \text{inv}(dG(xn))*G(xn)$ 
168 for i=1:m-1
169     G_eval = G;
170     dG_eval = dG;
171     for j=1:nr_var
172         G_eval = subs(G_eval,eval(['alpha',num2str(j)]),newton(j,i));
173         dG_eval = subs(dG,eval(['alpha',num2str(j)]),newton(j,i));
174     end
175     newton(1:nr_var,i+1) = newton(1:nr_var,i) - inv(dG_eval)*G_eval;
176 end
177
178 % solution = phi_null + sum(alpha(i) * phi(i,t))
179 solution=phi_null;
180 for i=1:n
181     solution = solution + newton(i,m)*subs(phi,k,i);
182 end
183
184 if (nr_var > n)
185     solution = subs(solution,eval(['alpha',num2str(n+1)]),newton((n+1),m));
186 end
187 if (nr_var > n+1)
188     solution = subs(solution,eval(['alpha',num2str(n+2)]),newton((n+2),m));
```

```

189 end
190
191 % Berechnung und Ausgabe des extremalen Funktionalwertes
192 k1=subs(f,[x x_punkt],[solution diff(solution,t)]);
193 k2=int(k1,t);
194 format long;
195 funktionalwert=subs(k2,t,tb)-subs(k2,t,ta)
196 format short;
197
198 % graphische Ausgabe der Näherungslösung:
199 if (type_a == 3)
200     ta = newton((n+1),m);
201 end
202 if (type_b == 3)
203     if (type_a == 3)
204         tb = newton((n+2),m);
205     end
206     tb = newton((n+1),m);
207 end
208
209 ezplot(solution,[ta tb]);
210
211 end

```

Nach Übergabe der Input-Parameter wird zunächst untersucht, ob die Parameter gültig sind, d.h. ob $type_a, type_b \in \{1, 2, 3\}$ und deren Parameter typ-abhängig sinnvolle Werte besitzen (Zeilen 13-17ff.). Anschließend werden für das vorgegebene n die Variablen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und abhängig der gegebenen Randbedingungen entsprechend weitere notwendige Variablen symbolisch deklariert (Zeilen 19-82). Symbolische Variablen sind in Matlab notwendig, damit bezüglich der Variablen integriert und differenziert werden kann. Anschließend (Zeilen 84-95) wird in einer geeigneten *for*-Schleife die Funktion $g = \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(t)$ konstruiert, welche bereits eine Approximation der Lösungsfunktion $\bar{x}(t)$ darstellt. Die Funktionen $\varphi_k(t)$, $k \in \mathbb{N}_0$ werden hierbei wie folgt definiert:

$$\varphi_0(t) := \frac{x_2 - x_1}{b - a}(t - a) + x_1$$

$$\varphi_k(t) := (t - a)(t - b)^k, \quad k \geq 1.$$

Diese Näherungslösung wird nun in das Funktional eingesetzt und explizit eine Stammfunktion berechnet, in welche bereits auch die Randbedingungen eingesetzt werden, welche in den Variablen ta und tb gespeichert sind. Im Falle von gegebenen Randbedingungen sowohl am linken als auch am rechten Rand (`type_a=1` und `type_b=1`) würde sich nun ein Gleichungssystem mit n Variablen und n Gleichungen ergeben. Bei natürlichen Randbedingungen oder Transversalitätsbedingungen an der Rändern wären zusätzliche Variablen aber auch zusätzliche Gleichungen gegeben, sodass das Gleichungssystem weiterhin eindeutig lösbar sein kann (Zeilen 105-142). Das Gleichungssystem wird in den Zeilen 97-99 erstellt und in den Zeilen 144-150 im Falle von natürlichen Randbedingungen oder Transversalitätsbedingungen entsprechend erweitert. Anschließend wird das Gleichungssystem $g(\alpha, \dots) = 0$ mit dem mehrdimensionalen Newton-Verfahren gelöst (Zeilen 153-176) und die freien Variablen in die Näherungslösung $y_n(t)$ eingesetzt (Zeilen 178-189). Die Lösung $y_n(t)$ minimiert das Funktional nun auf der Menge

$$\{\varphi_0(t) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(t) \mid \alpha_k \in \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{N}\} \quad (4.13)$$

mit den übergebenen Randbedingungen.

4.1.3. Anwendung von `R.m`

Die Funktion `R.m` wird im Befehlsfenster von Matlab aufgerufen. Die notwendigen Parameter müssen wir ebenfalls der Funktion übergeben. Hierbei wird der Integrand des Funktionals $f(t, x, \dot{x})$ in einfachen Hochkommata angegeben, die Randtypen sowie die Randbedingungen und der Genauigkeitsparameter n als normale Zahl. Als Ausgabe wird die Funktion sowohl die Näherungslösung $y_n(t)$ als auch den zugehörigen approximativen Funktionalwert $\mathfrak{S}_n = \int_a^b f(t, y_n(t), \dot{y}_n(t)) dt$ ausgeben und desweiteren die graphische Darstellung der Näherungslösung $y_n(t)$ auf dem Intervall $[a, b]$ anzeigen.

Beispiel 1:

Anwendung des Ritz'schen Verfahrens am Beispiel

$$\int_0^1 (\dot{x}^2 - x^2 - 2tx) dt \rightarrow \min$$

mit gegebenen Randbedingungen $x(0) = x(1) = 0$.

Listing 4.2.: Ausgabe der Matlab-Funktion `R.m` am **Beispiel 1**

```
1 >> [fwert yn] = R('x_punkt^2-x^2-2*t*x',1,[0 0],1,[1 0],2)
2
3 funktionalwert =
4
5     -0.024570912375790
6
7
8 fwert =
9
10     -0.0246
11
12
13 yn =
14
15     -(7*t^2*(t - 1))/41 - (71*t*(t - 1))/369
16
17 >>
```

Als Näherungslösung erhalten wir $y_n(t) = -\frac{7}{41}(t-1)t^2 - \frac{71}{369}(t-1)t$ und das Minimum des Funktionals mit den gegebenen Randbedingungen wäre damit $I(x(t)) \approx \mathfrak{S}_n = -0,0246$.

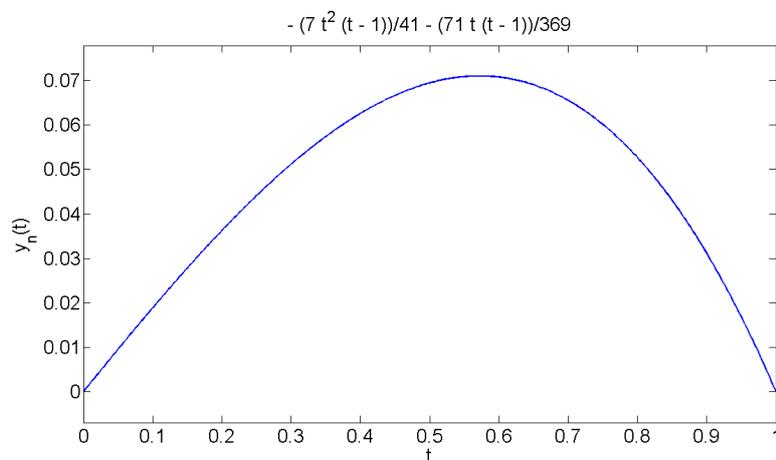


Abbildung 4.1.: Graphische Ausgabe der Funktion `R.m` für das Problem $\int_0^1 (\dot{x}^2 - x^2 - 2tx) dt \rightarrow \min$ mit Randbedingungen $x(0) = x(1) = 0$ und Diskretisierungsparameter $n = 2$

Beispiel 2:

Anwendung des Ritz'schen Verfahrens am Beispiel

$$\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \min$$

mit den gegebenen Randbedingungen $x(0) = 1$ am linken Rand und natürlichen Randbedingungen am rechten Rand $t = 1$.

Listing 4.3.: Ausgabe der Matlab-Funktion `R.m` für **Beispiel 2**

```

1 >> [fwert yn] = R('x_punkt^2+x^2',1,[0 1],2,1,2)
2
3 funktionalwert =
4
5     0.761627618677266
6
7
8 fwert =
9
10     0.7616
11

```

4. Direkte Methoden der Variationsrechnung

```
12
13 yn =
14
15 (250*t*(t - 1))/619 - (35*t^2*(t - 1))/619 - (215*t)/619 + 1
16
17 >>
```

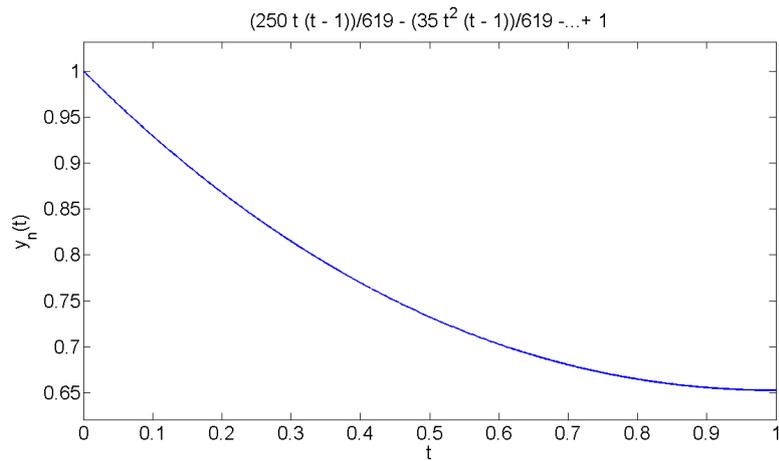


Abbildung 4.2.: Graphische Ausgabe der Funktion R.m für das Problem $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \min$ mit gegebener Randbedingung $x(0) = 1$ und Diskretisierungsparameter $n = 2$

Hier erhalten wir als Näherungslösung $y_n(t) = -\frac{35}{619}(t-1)t^2 + \frac{250}{619}(t-1)t - \frac{215}{619}t + 1$ und der minimale Funktionalwert mit den gegebenen Randbedingungen wäre damit $I(x(t)) \approx \mathfrak{S}_n = 0,7616$.

4.2. Das Endliche Differenzenverfahren

4.2.1. Das mathematische Modell

Bei dieser von Euler im Jahre 1744 veröffentlichten Methode³ wird versucht, die Lösungsfunktion $\bar{x}(t)$ des Minimierungsproblems (MP) durch den Grenzübergang von Polygonzügen für $n \rightarrow \infty$ zu betrachten. Er unterteilte zunächst das Intervall $[a, b]$ in $n + 1$ gleichgroße Intervalle mit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = b$ und ersetzte die Eckpunkte mit den Randbedingungen und den Differentialquotienten mit dem Differenzenquotienten $\frac{t_{k+1} - t_k}{\Delta t} \forall k \in \{0, \dots, n\}$, wobei $\Delta t = \frac{b-a}{n+1}$ der Intervalllänge entspricht. Desweiteren ersetzte er das Integral durch eine Summe über die n Teilintervalle.⁴ Die ursprüngliche Aufgabe ist also ein n -dimensionales Minimierungsproblem. Die Polygonzüge erfüllen die Randbedingungen und sind stetig. Allgemein wird ein Polygonzug über einem Vektorraum V zwischen Punkten $P_1, \dots, P_n \in V$ definiert über die Menge

$$\bigcup_{k=1}^n \{ \alpha \cdot P_{k-1} + (1 - \alpha) \cdot P_k, \alpha \in [0, 1] \}.$$

Das Intervall $[a, b]$ wird in n gleichgroße Teilintervalle mit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ unterteilt und man betrachtet die Randbedingungen zunächst als gegeben. Für den Polygonzug $(t_0, x_0), \dots, (t_n, x_n) \in \mathbb{R}^2$ gilt dann:

$$\Delta t = \frac{b - a}{n + 1}$$

$$t_k = t_0 + k \cdot \Delta t \quad (k = 0, 1, \dots, n + 1)$$

$$t_0 = a, \quad t_{n+1} = b$$

$$x_0 = x(a), \quad x_{n+1} = x(b)$$

Nun sind t_0, \dots, t_{n+1} als auch die Randpunkte x_0 und x_{n+1} gegeben, wobei hingegen x_1, \dots, x_n freie Variablen sind. Bei einem Variationsproblem mit gegebenen Randbedingungen gilt $x_0 = x(a)$ und $x_{n+1} = x(b)$.

³Funk (1970)

⁴vgl. die Methodik der Riemannschen Zwischensumme zur Approximation eines Integrals - Heuser (2003), S.447ff.

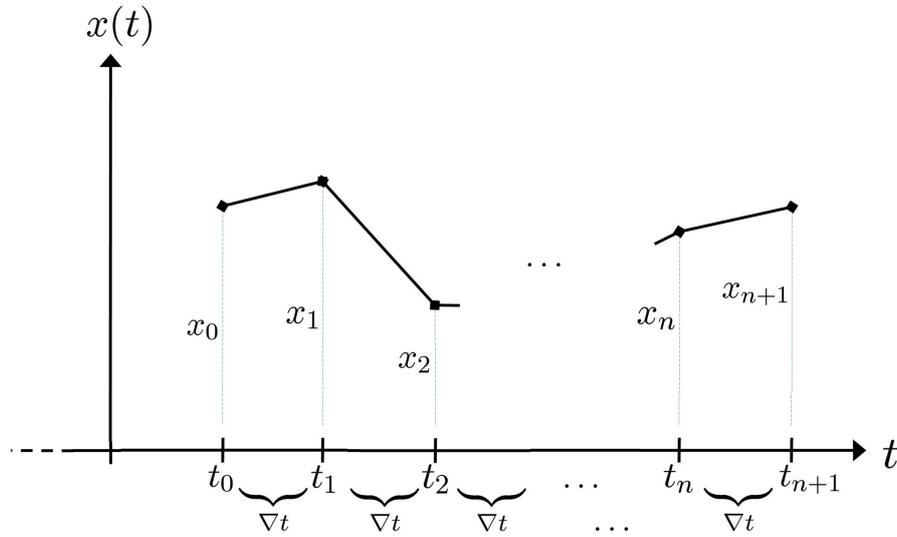


Abbildung 4.3.: Skizze des Endlichen Differenzenverfahrens⁵

Für den Funktionalwert ED_n des Polygonzugs $(t_i, x_i) \in \mathbb{R}^2$ gilt nun in Abhängigkeit der Parameter x_1, \dots, x_n :

$$ED_n(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=0}^n f(t_i, x_i, \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i})(t_{i+1} - t_i). \quad (4.14)$$

Das Minimierungsproblem (MP) kann umformuliert werden zu

$$ED_n(x_1, \dots, x_n) \approx I(x(t)) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \min \quad (4.15)$$

welches nun ein Problem endlicher Ordnung mit n freien Variablen x_1, \dots, x_n ist. Um das Minimum der approximativen Lösung des Funktional zu bestimmen, werden die Nullstellen der Funktionen $\frac{\partial}{\partial x_1} ED_n, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} ED_n$ berechnet. Aus diesem Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten lassen sich die freien Variablen exakt bestimmen. Ähnlich wie beim Ritz'schen Verfahren in Kapitel (4.1) bestimmen wir die Nullstellen über das mehrdimensionale Newton-Verfahren. Sie ergeben sich als Lösung

⁵wobei durch die gegebenen Randbedingungen $t_0 = a, t_{n+1} = b$ sowie $x_0 = x(a), x_{n+1} = x(b)$ gilt.

des Gleichungssystems $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ wobei

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} ED_n \\ \frac{\partial}{\partial x_2} ED_n \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} ED_n \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.16)$$

Endliches Differenzenverfahren mit natürlichen Randbedingungen

Sei das Variationsproblem

$$I(x(t)) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \min_{x(t) \in \Phi} \quad (\text{MP})$$

mit natürlichen Randbedingungen $x(a)$ und/oder $x(b)$ beliebig gegeben, so ist das Problem weiterhin mittels dem Endlichen Differenzenverfahren lösbar. In der klassischen Variationsrechnung gibt man die natürlichen Randbedingungen durch die Gleichungen (2.18) und (2.19) an:

$$f_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))|_{t=a} = 0 \quad (4.17)$$

$$f_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))|_{t=b} = 0. \quad (4.18)$$

Da wir nun die Lösung $\bar{x}(t)$ als Polygonzug der Punkte $(t_0, x_0), \dots, (t_{n+1}, x_{n+1})$ betrachten, müssen wir entsprechend auch die Gleichungen für die natürlichen Randbedingungen anpassen. Setzt man die entsprechenden Werte des Polygonzugs ein, sehen die diskretisierten natürlichen Randbedingungen wie folgt aus:

$$f_{\dot{x}} \left(t_0, x_0, \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} \right) (t_1 - t_0) = 0 \quad (4.19)$$

$$f_{\dot{x}} \left(t_n, x_n, \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n} \right) (t_{n+1} - t_n) = 0. \quad (4.20)$$

Nachdem wir bei einem Variationsproblem mit vollständigen Randbedingungen genau n freie Variablen und n Gleichungen haben, ergeben sich bei freien Randbedingungen

eine (bzw. zwei) zusätzliche Variablen als auch eine (bzw. zwei) zusätzliche Gleichungen, sodass das Gleichungssystem nach wie vor lösbar sein kann.

Das zu lösende Gleichungssystem sieht folgendermaßen aus:

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} ED_n \\ \frac{\partial}{\partial x_2} ED_n \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} ED_n \\ f_{\dot{x}} \left(t_n, x_n, \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n} \right) (t_{n+1} - t_n) = 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.21)$$

Das Verfahren lässt sich im Falle von natürlichen Randbedingungen am rechten Ende oder an beiden Enden analog erweitern.

Endliches Differenzenverfahren mit Transversalitätsbedingungen

Ist ein Variationsproblem mit Transversalitätsbedingungen gemäß (2.20) gegeben, so ergeben sich analog entsprechende ähnliche Gleichungen. Sei $x(a)$ beliebig wobei $x(a) = \psi_a(a)$ gelte. Man wählt a als weitere freie Variable und durch Diskretisierung von Gleichung (2.20) erhält man die zugehörige Gleichung:

$$f \left(t_0, x_0, \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} \right) + f_{\dot{x}} \left(t_0, x_0, \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} \right) \left(\dot{\psi}_a(t_0) - \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} \right) = 0. \quad (4.22)$$

Desweiteren müssen wir beachten, dass die Länge und Lage der Teilintervalle nicht mehr fest vorgegeben sind, sondern nun von der freien Variablen a abhängig sind. Dennoch liegt nun ein Gleichungssystem mit $n + 1$ Variablen und $n + 1$ Gleichungen vor, welches nach den freien Variablen aufgelöst werden kann.

Auch hier kann man bei transversalen Randbedingungen am rechten Rand oder an beiden Rändern analog verfahren.

Beispiel des Endlichen Differenzenverfahrens

Betrachten wir das Variationsproblem

$$I(x) = \int_0^1 (\dot{x}^2 - x^2 - 2tx) dt \rightarrow \min, \quad x(0) = x(1) = 0$$

zur manuellen Berechnung der Näherungslösung mit $n = 3$, d.h. es gibt dann drei Variablen x_1, x_2 und x_3 . Beginnen wir mit einer gleichmäßigen Partition des Intervalls $[0, 1]$:

$$\Delta t = \frac{b - a}{n + 1} = \frac{1}{4}$$

Hieraus ergibt sich die Partition von $[0, 1]$ als $t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{4}, t_2 = \frac{2}{4}, t_3 = \frac{3}{4}, t_4 = 1$. Weiterhin gegeben sind die Randbedingungen $x_0 = 0$ und $x_4 = 0$. Eingesetzt in Gleichung (4.14) folgt:

$$\begin{aligned} ED_3(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{i=0}^3 f\left(t_i, x_i, \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i}\right)(t_{i+1} - t_i) \\ &= \frac{1}{4} \left[f\left(0, 0, 4x_1\right) + f\left(\frac{1}{4}, x_1, 4(x_2 - x_1)\right) + f\left(\frac{2}{4}, x_2, 4(x_3 - x_2)\right) + f\left(\frac{3}{4}, x_3, -4x_3\right) \right] \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2}x_1 - x_2 - \frac{3}{2}x_3 + 15x_1^2 - x_2^2 + 15x_3^2 + (4x_1 - 4x_2)^2 + (4x_2 - 4x_3)^2 \right) \end{aligned}$$

Aus dem Gleichungssystem $\frac{\partial}{\partial x_1} ED_3 = 0, \frac{\partial}{\partial x_2} ED_3 = 0, \frac{\partial}{\partial x_3} ED_3 = 0$ ergibt sich mittels Newtonverfahren die Minimallösung mit

$$x_1 \approx 0,0443 \quad x_2 \approx 0,0702 \quad x_3 \approx 0,0604$$

Der komplette Polygonzug würde demnach folgendermaßen aussehen:

1	0	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
2	0	0.0443	0.0702	0.0604	0

wobei in der ersten Zeile die Werte $t_i, (i = 0, \dots, 4)$ und in der zweiten Zeile die Werte $x_i, (i = 0, \dots, 4)$ stehen. Die graphische Ausgabe der Lösung sieht folgendermaßen aus:

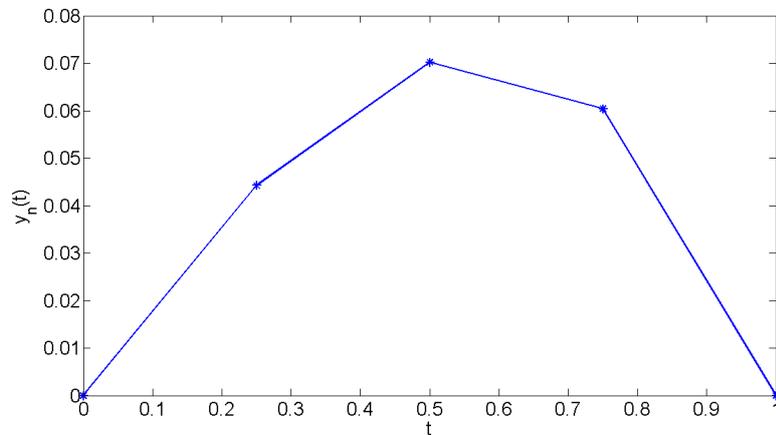


Abbildung 4.4.: Näherungslösung ED_3 am Beispiel $\int_0^1 (\dot{x}^2 - x^2 - 2tx) dt \rightarrow \min$ mit gegebenen Randbedingungen $x(0) = x(1) = 0$ und Diskretisierungsparameter $n = 3$

Hieraus würde sich ein approximativer minimaler Funktionalwert von etwa $-0,02286$ ergeben.

4.2.2. Implementierung des Endlichen Differenzenverfahrens in Matlab

Die Matlab-Funktion `ED.m` generiert als Ausgabe sowohl den minimalen Näherungswert des Funktional, als auch die explizite sowie graphische Darstellung der Näherungslösung $y_n(t) \approx \bar{x}(t)$ als Ergebnis des Endlichen Differenzenverfahrens.

Es werden die folgenden Input-Parameter benötigt:

- f : Der Integrand $f(t, x, \dot{x})$ in Abhängigkeit der Parameter t , x und x_punkt und übergeben in einfachen Hochkommata
- $type_a, type_b, rand_a, rand_b$: Die Angabe der Randbedingungen und deren Parameter sowohl für den linken als auch für den rechten Rand, wobei gilt:
 - $type = 0$: Die Randbedingung ist komplett gegeben, d.h. a und $x(a)$ werden in Vektorform als Parameter $rand_a$ übergeben: $rand_a = [a \ x(a)]$.
 - $type = 1$: Es werden am jeweiligen Rand die natürlichen Randbedingungen verwendet. Hier wird als Parameter $rand_a$ nur die Grenze a übergeben: $rand_a = a$.

4. Direkte Methoden der Variationsrechnung

- $type = 2$: Hier wird die Transversalitätsbedingung $x(a) = f(a)$ angewandt und die Funktion $f(a)$ als Parameter übergeben: $rand_a = f(a)$.
- n : Die Genauigkeit der Näherungslösung $y_n(t)$, welche ein Polygonzug zwischen $n + 2$ Punkten sein wird.

Listing 4.4.: Die Matlab-Funktion ED.m zur Berechnung und Ausgabe einer Näherungslösung durch das Endliche Differenzenverfahren

```
1 function [funktionswert, solution] = ED( f, type_a, rand_a, type_b, rand_b, n )
2 %ED Summary of this function goes here
3 % Detailed explanation goes here
4
5 n;      % Angabe der Genauigkeit
6 f;      % gegebener Integrand
7
8 type_a; type_b; % Typen an den Rändern (Natürliche, Transversalität)
9 % type = 1: Randbedingung komplett gegeben, a und x(a)
10 % type = 2: Natürliche Randbedingung mit a gegeben
11 % type = 3: Transversalitätsbedingung: x(a) = f(a) gegeben
12
13 rand_a; rand_b; % Parameter in Abhg vom Typ
14
15 if ((type_a > 3) | (type_b > 3) | (type_a < 1) | (type_b < 1))
16     disp('Dies ist keine gültige Eingabe für den Typ (1, 2 oder 3)')
17     disp('Bitte starten Sie das Programm erneut')
18     return
19 end
20
21 % Deklarieren der symbolischen Variablen
22 syms 'x'; syms 'x_punkt'; syms 't'; syms 'k'; syms 'a'; syms 'b';
23
24 for i=1:n
25     eval(['syms_x', num2str(i)])
26 end
27
28 nr_var = n;
29 ta=0; tb=0; xa=0; xb=0;
30 % Zusätzliche Variablen für zusätzliche Gleichungen durch andere Typs
31 switch (type_a)
32     case 1
33         ta = rand_a(1); xa = rand_a(2);
34     case 2
35         eval(['syms_x', num2str(n+1)]); % xa_frei
36         ta = rand_a(1);
37         xa = eval(['x', num2str(n+1)]);
```

```

38     nr_var = nr_var + 1;
39 case 3
40     eval(['syms x', num2str(n+1)]); % ta_frei
41     ta = eval(['x', num2str(n+1)]);
42     xa = subs(rand_a, 'a', eval(['x', num2str(n+1)]));
43     nr_var = nr_var + 1;
44 otherwise
45     disp('Dies ist keine gültige Eingabe für den Typ (1, 2 oder 3)!')
46     disp('Bitte starten Sie das Programm erneut')
47     return
48 end
49
50 % Zusätzliche Variablen für zusätzliche Gleichungen durch andere Typs
51 switch (type_b)
52 case 1
53     tb = rand_b(1); xb = rand_b(2);
54 case 2
55     if (type_a == 1)
56         eval(['syms x', num2str(n+1)]); % xb_frei
57         tb = rand_b(1);
58         xb = eval(['x', num2str(n+1)]);
59         nr_var = nr_var + 1;
60     end
61     if (type_a == 2)
62         eval(['syms x', num2str(n+2)]); % xb_frei
63         tb = rand_b(1);
64         xb = eval(['x', num2str(n+2)]);
65         nr_var = nr_var + 1;
66     end
67 case 3
68     if (type_a == 1)
69         eval(['syms x', num2str(n+1)]); % tb_frei
70         tb = eval(['x', num2str(n+1)]);
71         xb = subs(rand_b, 'b', tb);
72         nr_var = nr_var + 1;
73     end
74     if (type_a == 3)
75         eval(['syms x', num2str(n+2)]); % tb_frei
76         tb = eval(['x', num2str(n+2)]);
77         xb = subs(rand_b, 'b', tb);
78         nr_var = nr_var + 1;
79     end
80 otherwise
81     disp('Dies ist keine gültige Eingabe für den Typ (1, 2 oder 3)!')
82     disp('Bitte starten Sie das Programm erneut')
83     return
84 end
85

```

4. Direkte Methoden der Variationsrechnung

```

86 solution = meshgrid(1:(n+2),1:2);
87 solution(2,1:n+2) = linspace(ta,tb,n+2);
88 %for j=1:n
89 %   solution(2,j) = ta + (tb-ta)*[0:(n+1)]/(n+1);
90 %end
91
92 h1 = 0;
93 if (n>1)
94     for i=1:(n-1)
95         h1 = h1 + (solution(2,i+2) - solution(2,i+1)) * subs(f,[t x x_punkt], ...
96             [solution(2,i+1) eval(['x', num2str(i)]) ((eval(['x', ...
97                 num2str(i+1)])-eval(['x', num2str(i)]))...
98                 /(solution(2,i+2)-solution(2,i+1)))]);
99     end
100 end
101
102 % x(a) einarbeiten
103 h1 = h1 + (solution(2,2) - solution(2,1)) * subs(f,[t x x_punkt], ...
104     [solution(2,1) xa ((eval(['x', num2str(1)])-xa)...
105     /(solution(2,2)-solution(2,1)))]);
106
107 % x(b) einarbeiten
108 h1 = h1 + (solution(2,n+2) - solution(2,n+1)) * subs(f,[t x x_punkt], ...
109     [solution(2,n+1) eval(['x', num2str(n)]) ((xb-eval(['x', num2str(n)]))...
110     /(solution(2,n+2)-solution(2,n+1)))]);
111
112
113 F=x*[1:nr_var];
114 G=meshgrid(F,F);
115 dG=G;           % Erzeugung einer (nr_var)x(nr_var)-Matrix
116
117 for i=1:n
118     G(i,1) = diff(h1,eval(['x', num2str(i)]));
119 end
120
121 % Zusätzliche Gleichungen aufgrund der Typen
122 switch (type_a)
123     case 1
124         switch (type_b)
125             case 2
126                 G((n+1),1) = (tb-solution(2,n+1))*subs(diff(f,x_punkt),...
127                     [t x x_punkt], [solution(2,n+1) eval(['x', num2str(n)]) ...
128                     ((xb-eval(['x', num2str(n)]))/(tb-solution(2,n+1)))]);
129             case 3
130                 G((n+1),1) = subs(f, [t x x_punkt], [solution(2,n+1) ...
131                     eval(['x', num2str(n)]) ((xb-eval(['x', num2str(n)]))/ ...
132                     (tb-solution(1,n+1)))] + (subs(diff(rand_b,b),b,tb)- ...
133                     (xb-eval(['x', num2str(n)]))/(tb-solution(2,n+1))* ...

```

4. Direkte Methoden der Variationsrechnung

```

134         subs(diff(f,x_punkt),[t x x_punkt], [solution(1,n+1) ...
135         eval(['x', num2str(n)]) ((xb-eval(['x', num2str(n)]))/ ...
136         (tb-solution(2,n+1))));
137     end
138 case 2
139     switch (type_b)
140     case 1
141         G((n+1),1) = (solution(2,2)-ta)*subs(diff(f,x_punkt), ...
142         [t x x_punkt],[ta xa ((eval(['x', num2str(1)])-xa)/ ...
143         (solution(2,2)-ta))]);
144     case 2
145         G((n+1),1) = (solution(2,2)-ta)*subs(diff(f,x_punkt), ...
146         [t x x_punkt],[ta xa ((eval(['x', num2str(1)])-xa)/ ...
147         (solution(2,2)-ta))]);
148     G((n+2),1) = (tb-solution(2,n+1))*subs(diff(f,x_punkt), ...
149     [t x x_punkt],[solution(2,n+1) eval(['x', num2str(n)]) ...
150     ((xb-eval(['x', num2str(n)]))/(tb-solution(2,n+1))));
151     end
152 case 3
153     switch (type_b)
154     case 1
155         G((n+1),1) = subs(f, [t x x_punkt], [ta xa ...
156         (solution(2,2)-xa)/(solution(1,n+1)-ta)]) + ...
157         (subs(diff(rand_a,a),a,ta)-(solution(2,2)-xa)/ ...
158         (solution(1,2)-ta))* subs(diff(f,x_punkt), ...
159         [t x x_punkt],[ta xa (solution(2,2)-xa)/(solution(1,2)-ta)]);
160     case 3
161         G((n+1),1) = subs(f, [t x x_punkt], [ta xa ...
162         (solution(2,2)-xa)/(solution(1,n+1)-ta)]) + ...
163         (subs(diff(rand_a,a),a,ta)-(solution(2,2)-xa)/ ...
164         (solution(1,2)-ta))* subs(diff(f,x_punkt), ...
165         [t x x_punkt],[ta xa (solution(2,2)-xa)/(solution(1,2)-ta)]);
166     G((n+2),1) = subs(f, [t x x_punkt], [solution(2,n+1) ...
167     eval(['x', num2str(n)]) ((xb-eval(['x', num2str(n)]))/ ...
168     (tb-solution(1,n+1)))] + (subs(diff(rand_b,b),b,tb)- ...
169     (xb-eval(['x', num2str(n)]))/(tb-solution(2,n+1))* ...
170     subs(diff(f,x_punkt),[t x x_punkt], [solution(1,n+1) ...
171     eval(['x', num2str(n)]) ((xb-eval(['x', num2str(n)]))/ ...
172     (tb-solution(2,n+1))));
173     end
174 end
175
176 for i=1:nr_var
177     for j=1:nr_var
178         dG(i,j) = diff(G(i,1),eval(['x',num2str(j)]));
179     end
180 end
181

```

4. Direkte Methoden der Variationsrechnung

```
182 G = G(1:nr_var,1);
183
184
185 % mehrdimensionales Newton-Verfahren um Nullstellen zu finden
186
187 m = 10; % Anzahl der Iterations-schritte
188
189 newton1 = [1:m];
190 newton2 = [1:nr_var];
191 newton = meshgrid(newton1,newton2);
192
193 % Startvektor (0,0,...,0)
194 for i=1:nr_var
195     newton(i,1)=0;
196 end
197
198 % Berechnung der m Iterationsschritte durch
199 %  $x^{(n+1)} = x^{(n)} - \text{inv}(dG(x_n)) * G(x_n)$ 
200 for i=1:m-1
201     G_eval = G;
202     dG_eval = dG;
203     for j=1:nr_var
204         G_eval = subs(G_eval,eval(['x',num2str(j)]),newton(j,i));
205         dG_eval = subs(dG,eval(['x',num2str(j)]),newton(j,i));
206     end
207     newton(1:nr_var,i+1) = newton(1:nr_var,i) - inv(dG_eval)*G_eval;
208 end
209
210 solution(1,2:(n+1)) = transpose(newton(1:n,m));
211 solution = transpose(solution);
212 solution(:,[1,2]) = solution(:,[2,1]);
213
214 if (type_a == 1)
215     solution(1,2) = xa;
216 end
217 if (type_b == 1)
218     solution(n+2,2) = xb;
219 end
220 if ((type_a == 2) && (type_b ~= 2))
221     solution(1,2) = newton(n+1,m);
222 end
223 if ((type_a ~= 2) && (type_b == 2))
224     solution(n+2,2) = newton(n+1,m);
225 end
226 if ((type_a == 2) && (type_b == 2))
227     solution(1,2) = newton(n+1,m);
228     solution(n+2,2) = newton(n+2,m);
229 end
```

4. Direkte Methoden der Variationsrechnung

```
230
231 % Berechnung und Ausgabe des extremalen Funktionalwertes
232 funktionswert=h1;
233 for i=1:nr_var
234     funktionswert = subs(funktionswert,eval(['x', ...
235         num2str(i)]),newton(i,m));
236 end
237
238
239 format long;
240 funktionswert
241 format short;
242
243 % graphische Ausgabe der Näherungslösung:
244 plot(solution(1:(n+2),1),solution(1:(n+2),2))
245
246 end
```

Nach der Übergabe der Parameter findet die Fehlerüberprüfung sowie das Deklarieren der Variablen ähnlich wie in `R.m` statt (Zeilen 1-84). Anschließend wird die $2 \times (n + 2)$ -Matrix *solution* definiert, welche am Ende die Unterteilung des Intervalls t_k sowie die Funktionswerte $x_k = x(t_k)$ für $k \in \{0, 1, \dots, n + 1\}$ enthalten soll. Zunächst wird das Intervall $[a, b]$ in $n + 1$ Teilintervalle der Länge $\Delta t = \frac{b-a}{n+1}$ aufgeteilt und zusammen mit - sofern gegeben - den Randbedingungen in das Lösungsarray *solution* geschrieben. In den darauffolgenden Zeilen 92-100 wird die Funktion $ED_n = \sum_{i=0}^n f(t_i, x_i, \frac{x_{i+1}-x_i}{t_{i+1}-t_i})(t_{i+1} - t_i)$ abhängig von den symbolischen Variablen x_1, \dots, x_n konstruiert. Im Falle von freien Randwerten oder natürlichen Randbedingungen wäre ED_n von weiteren Variablen abhängig. Anschließend wird die mehrdimensionale Funktion g konstruiert, deren Nullstellen auch hier mit dem mehrdimensionalen Newton-Verfahren bestimmt werden (Zeilen 172-195). Nun werden noch die soeben berechneten Variablen x_1, \dots, x_n, \dots in das Lösungsarray *solution* eingetragen, sodass direkt der approximative Funktionalwert berechnet werden kann und die graphische Ausgabe der Lösung stattfindet (Zeilen 197-233).

4.2.3. Anwendung von ED.m

Die Anwendung der Funktion ED.m geschieht im Befehlsfenster von Matlab durch Aufruf der Funktion mit den gegebenen Parametern.

Beispiel 1:

Anwendung des Endlichen Differenzenverfahrens am Variationsproblem

$$\int_0^1 (\dot{x}^2 - x^2 - 2tx) dt \rightarrow \min$$

mit den Randbedingungen $x(0) = x(1) = 0$. Der Genauigkeitsparameter sei $n = 8$; das bedeutet unsere Näherungslösung stellt einen Polygonzug zwischen zehn Punkten dar.

Listing 4.5.: Ausgabe der Matlab-Funktion ED.m für **Beispiel 1**

```
1 >> [fwert yn] = ED('x_punkt^2-x^2-2*t*x',1,[0 0],1,[1 0],8)
2
3 funktionswert =
4
5     -0.024234217182554
6
7
8 fwert =
9
10     -0.0242
11
12
13 yn =
14
15         0         0
16     0.1111     0.0207
17     0.2222     0.0397
18     0.3333     0.0556
19     0.4444     0.0666
20     0.5556     0.0713
21     0.6667     0.0683
22     0.7778     0.0562
23     0.8889     0.0338
24     1.0000         0
25
26 >>
```

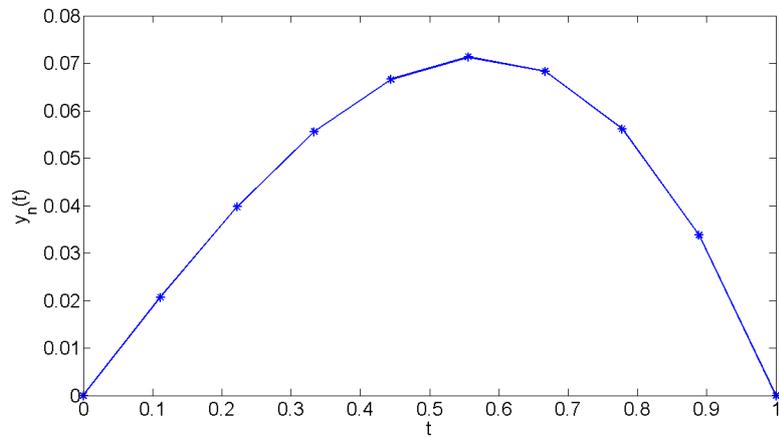


Abbildung 4.5.: Graphische Ausgabe der Funktion ED.m für das Problem $\int_0^1 (\dot{x}^2 - x^2 - 2tx) dt \rightarrow \min$ mit den Randbedingungen $x(0) = x(1) = 0$ und Diskretisierungsparameter $n = 8$

Der Funktionalwert ED_8 der Näherungslösung wäre demnach

$$I(\bar{x}(t)) \approx ED_8 \approx -0,0242.$$

Beispiel 2:

Anwendung des Endlichen Differenzenverfahrens am Beispiel

$$\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \min \tag{4.23}$$

mit der gegebenen Randbedingungen $x(0) = 1$ am linken Rand und natürlichen Randbedingungen am rechten Rand $t = 1$. Sei $n = 6$, das bedeutet die Lösung ist ein Polygonzug zwischen acht Punkten.

Listing 4.6.: Ausgabe der Matlab-Funktion ED.m für **Beispiel 2**

```

1 >> [fwert yn] = ED('x_punkt^2+x^2',1,[0 1],2,1,6)
2
3 funktionswert =
4
5     0.802846203197610
6

```

4. Direkte Methoden der Variationsrechnung

```
7
8  fwert =
9
10     0.8028
11
12
13  yn =
14
15     0     1.0000
16     0.1429  0.9057
17     0.2857  0.8299
18     0.4286  0.7711
19     0.5714  0.7279
20     0.7143  0.6997
21     0.8571  0.6857
22     1.0000  0.6857
23
24 >>
```

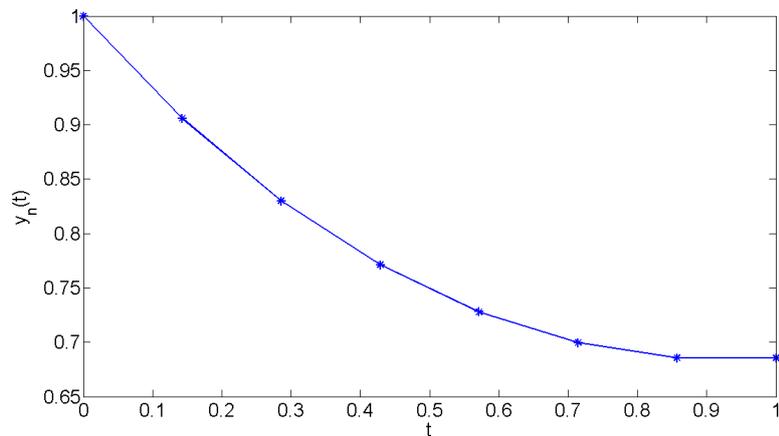


Abbildung 4.6.: Graphische Ausgabe der Funktion ED.m für das Problem $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \min$ mit gegebener Randbedingung $x(0) = 1$ und Diskretisierungsparameter $n = 6$

Der Funktionalwert ED_6 der Näherungslösung wäre demnach

$$I(\bar{x}(t)) \approx ED_6 \approx 0,8028.$$

4.3. Konvergenz und Vergleich der Verfahren

Um die Konvergenz eines Verfahrens zu beurteilen, betrachten wir den Fehler der approximativen Lösung von der exakten Lösung bezüglich einer bestimmten Norm. Die zwei gängigsten Normen wären hierbei die L^2 -Norm und die L^∞ -Norm. Diese seien wie folgt definiert:

Definition 16. Sei $\bar{x}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die exakte Lösung eines Variationsproblems und $y_n(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die zugehörige Näherungslösung, dann definieren wir

$$\|\bar{x}(t) - y_n(t)\|_{L^p} := \left(\int_a^b (\bar{x}(t) - y_n(t))^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in \mathbb{R}_+ \quad (4.24)$$

$$\|\bar{x}(t) - y_n(t)\|_{L^\infty} := \max_{t \in [a, b]} \{|\bar{x}(t) - y_n(t)|\}. \quad (4.25)$$

Bei der Implementierung in Matlab muss das Intervall $[a, b]$ in eine hinreichend große Stückzahl m an Teilintervallen zerlegt werden und auf diesem Vektor $v \in \mathbb{R}^m$ wird anschließend die Matlab-interne Funktion `norm` aufgerufen.⁶ Um die Konvergenz deutlich zu machen, zeichnen wir n auf der x-Achse und $\|\bar{x}(t) - y_n(t)\|_{L^p}$ auf der y-Achse für $p \in \{2, \infty\}$ sowohl mit doppel-logarithmischer als auch mit semi-logarithmischer Achsenskalierung.

Diese Methode der Konvergenzbetrachtung funktioniert natürlich nur für Variationsprobleme, für die die exakte Lösung über den klassischen Weg (z.B. die Eulersche Differentialgleichung) bereits explizit berechenbar ist. Andererseits besteht keine Möglichkeit, den Fehler von der exakten Lösung zu betrachten, es bestehen allerdings alternative Betrachtungsmöglichkeiten.⁷ Anbei die Konvergenzbetrachtung für zwei verschiedene Variationsprobleme, sowohl mit gegebenen als auch mit variablen Randbedingungen.

⁶In den eigens implementierten Matlab-Funktionen `R_norm.m` und `ED_norm.m` wählen wir $m = 200$.

⁷Falls die Lösung $\bar{x}(t)$ unbekannt ist, könnte man ebenfalls die Folge $\|y_n(t) - y_{n+k}(t)\|_{L^p}$ für ein festes $k \in \mathbb{N}$ untersuchen.

Listing 4.3.: R_norm.m zur Berechnung der Norm des Fehlers beim Ritz'schen Verfahren

```

1 function R_norm(r, norm1, norm2)
2 syms 't';
3
4 % Beispiel 1
5 funktional = 'x_punkt^2-x^2-2*t*x';
6 exakt = sin(t)/sin(1) -t;
7 type_a = 1 ; RB1 = [0 0];
8 type_b = 1 ; RB2 = [1 0];
9
10 % Beispiel 2
11 % funktional = 'x_punkt^2+x^2';
12 % c = (exp(1)/(exp(1)+exp(-1)));
13 % exakt = c*exp(-t)+(1-c)*exp(t);
14 % type_a = 1 ; RB1 = [0 1];
15 % type_b = 2 ; RB2 = 1;
16
17 m = 200;          % Unterteilung für L_Norm
18 p1 = norm1;      % p1-Norm
19 p2 = norm2;      % p2-Norm
20 r = r;           % Anzahl der Durchgänge
21
22 A = meshgrid([1:r],[1 2]);
23 q = linspace(RB1(1),RB2(1),m);
24
25 % Berechnung der Näherungsfunktionen sowie der Norm des Fehlers
26 for j=1:r
27     [a b] = R(funktional, type_a, RB1, type_b, RB2, j);
28     A(1,j) = j;
29     A(2,j) = norm(subs(b-exakt,t,q), p1);
30     A(3,j) = norm(subs(b-exakt,t,q), p2);
31 end
32
33 A % Ausgabe der Fehler in einer Matrix
34
35 % graphische Ausgabe der Konvergenz bzgl. der beiden Normen
36 semilogy(A(1,:),A(2,:), '-b*') %Semi-logarithmische Darstellung
37 hold on;
38 semilogy(A(1,:),A(3,:), '-.rs') %Semi-logarithmische Darstellung
39 a = get(gca, 'YLim');
40 set(gca, 'XLim', [0.9 r+0.5]);
41 set(gca, 'YLim', a);
42 set(gca, 'XTick', 1:1:r)
43 legend({'p=2', 'p=Inf'})
44
45 end

```

Listing 4.4.: ED_norm.m zur Berechnung der Norm des Fehlers beim Endlichen Differenzenverfahren nach Euler

```

1 function ED_norm( r , norm1 , norm2)
2 syms 't';
3
4 % Beispiel 1
5 funktional = 'x_punkt^2-x^2-2*t*x';
6 exakt = sin(t)/sin(1) -t;
7 type_a = 1 ; RB1 = [0 0];
8 type_b = 1 ; RB2 = [1 0];
9
10 % Beispiel 2
11 % funktional = 'x_punkt^2+x^2';
12 % c = (exp(1)/(exp(1)+exp(-1)));
13 % exakt = c*exp(-t)+(1-c)*exp(t);
14 % type_a = 1 ; RB1 = [0 1];
15 % type_b = 2 ; RB2 = 1;
16
17 m = 200;          % Unterteilung für L-Norm
18 p1 = norm1;      % p1-Norm
19 p2 = norm2;      % p2-Norm
20 r = r;           % Anzahl der Durchgänge
21
22 A = meshgrid([1:r],[1 2]);
23 q = linspace(RB1(1),RB2(1),m);
24
25 % Berechnung der Näherungsfunktionen sowie der Norm des Fehlers
26 for j=1:r
27     [a b] = ED(funktional , type_a , RB1 , type_b , RB2 , j);
28     b2 = [1:m];
29     for i=1:m
30         k1 = (floor((i-1)*(size(b,1)-1)/(m-1)));
31         k2 = (i-1)*(size(b,1)-1)/(m-1)-k1;
32         if (i < m)
33             b2(i) = (1-k2)*b(k1+1,2)+k2*b(k1+2,2);
34         end
35         if (i == m)
36             b2(i) = (1-k2)*b(k1+1,2);
37         end
38     end
39     A(1,j) = j;
40     A(2,j) = norm(b2-subst(exakt , t , q) , p1);
41     A(3,j) = norm(b2-subst(exakt , t , q) , p2);
42 end
43
44 A % Ausgabe der Fehler in einer Matrix
45

```

```

46 % graphische Ausgabe der Konvergenz bzgl. der beiden Normen
47 loglog(A(1,:),A(2,:), '—b*') %Doppel-logarithmische Darstellung
48 hold on;
49 loglog(A(1,:),A(3,:), '—rs') %Doppel-logarithmische Darstellung
50 a = get(gca, 'YLim');
51 set(gca, 'XLim', [0.9 r+0.5]);
52 set(gca, 'YLim', a);
53 set(gca, 'XTick', 1:1:r)
54 legend({'p=2', 'p=Inf'})
55
56 end

```

Die Matlab-Funktionen `ED_norm.m` und `R_norm.m` berechnen die Norm des Fehlers $\|\bar{x}(t) - y_n(t)\|_{L^{p_i}}$ für $n \in \{1, 2, \dots, r\}$ für ein vorgegebenes $r \in \mathbb{N}$ sowie zwei Normen p_i , $i = 1, 2$. Das Intervall $[a, b]$ wird jeweils in 200 Teilintervalle gleicher Länge unterteilt, um hierauf die Norm der Differenz zwischen exakter Lösung $\bar{x}(t)$ und Näherungslösung $y_n(t)$ zu berechnen. Diese beiden Normen werden anschließend in Abhängigkeit des Genauigkeitsparameters n mit logarithmischen Achsen graphisch ausgegeben.

Benötigte Input-Parameter der Funktionen `ED_norm.m` und `R_norm.m` sind:

- r : Berechnung der Norm findet bis zur Näherungslösung $y_r(t)$ statt
- p_1 : Berechnung der L^{p_1} -Norm
- p_2 : Berechnung der L^{p_2} -Norm

Beispiel 1: $\int_0^1 \dot{x}^2 - x^2 - 2tx \, dt$ mit $x(0) = 0$ und $x(1) = 0$. Die exakte Lösung lautet:

$$\bar{x}(t) = \frac{\sin(t)}{\sin(1)} - t.$$

Für die Herleitung der exakten Lösung $\bar{x}(t)$ siehe Appendix A. Anbei die graphische Darstellung der Norm des Fehlers $\|\bar{x}(t) - y_n(t)\|_{L^p}$ für $p \in \{2, \infty\}$ sowohl für das Ritz'sche Verfahren als auch für das Endliche Differenzenverfahren.

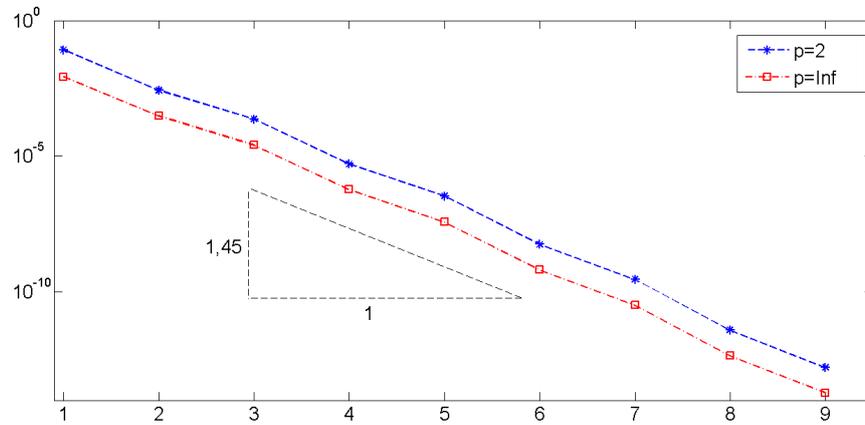


Abbildung 4.7.: Semi-logarithmische Darstellung der L^2 -Norm und der L^∞ -Norm des Fehlers für das Ritz'sche Verfahren für **Beispiel 1**

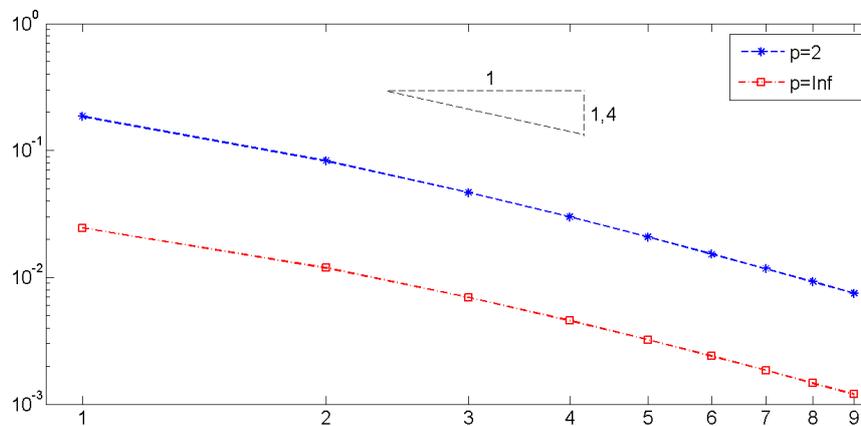


Abbildung 4.8.: Doppel-logarithmische Darstellung der L^2 -Norm und der L^∞ -Norm des Fehlers für das Endliche Differenzenverfahren für **Beispiel 1**

Aus Abbildung 4.7 lässt sich durch den nahezu linearen Zusammenhang in der semi-logarithmischen Darstellung vermuten, dass bei Betrachtung der L^2 -Norm und der L^∞ -Norm die Näherungslösung exponentiell gegen die exakte Lösung konvergiert. Daher gilt der folgende Zusammenhang für das Ritz'sche Verfahren:

$$\|\bar{x}(t) - y_n(t)\|_{L^p} \leq c \cdot e^{\beta n} \quad (4.26)$$

wobei n der Diskretisierungsparameter ist und β und c Konstanten, welche abhängig von der Wahl des Funktionals inklusive der Randbedingungen sowie der Norm sind. Die Anwendung des Logarithmus auf beiden Seiten der Ungleichung führt zu

$$\log(\|\bar{x}(t) - y_n(t)\|_{L^p}) \leq \log(c) + \beta n \cdot \log(e). \quad (4.27)$$

Wenn wir nun $\log(\|\bar{x}(t) - y_n(t)\|_{L^p})$ bzgl. n graphisch darstellen, so erhalten wir in diesem Fall eine Gerade mit Steigung $\beta \log(e)$ und für $p \in \{2, \infty\}$ und zwei beliebige $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ergibt sich β durch

$$\beta = \frac{\log(\|\bar{x}(t) - y_{n_1}(t)\|_{L^p}) - \log(\|\bar{x}(t) - y_{n_2}(t)\|_{L^p})}{\log(e) \cdot (n_1 - n_2)}. \quad (4.28)$$

Für $n_1 = 1$ und $n_2 = 9$ erhalten wir die folgenden Werte:

- $\beta_{L^2} = -3,37$ für $p = 2$
- $\beta_{L^\infty} = -3,35$ für $p = \infty$.

Dies würde somit einer Steigung in Abbildung 4.7 von $\beta_{L^2} \log(e) \approx 1,455$ für $p = 2$ bzw. $\beta_{L^\infty} \log(e) \approx 1,464$ für $p = \infty$ entsprechen.

Bei Betrachtung der Norm des Fehlers des Endlichen Differenzenverfahrens erkennen wir in Abbildung 4.8 näherungsweise eine Gerade, sofern wir $\log(\|\bar{x}(t) - y_n(t)\|_{L^p})$ bzgl. $\log(n)$ zeichnen. Dies bedeutet, dass man den Fehler der Näherungslösung $y_n(t)$ zur exakten Lösung $\bar{x}(t)$ folgendermaßen abschätzen kann:

$$\|\bar{x}(t) - y_n(t)\|_{L^p} \leq c \cdot n^\alpha \quad (4.29)$$

Wenden wir auf beiden Seiten den Logarithmus an, so erhalten wir

$$\log(\|\bar{x}(t) - y_n(t)\|_{L^p}) \leq \log(c) + \alpha \cdot \log(n). \quad (4.30)$$

Wir würden demnach eine Steigung von α im Graph erkennen können und für zwei beliebige Punkte $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ gilt

$$\alpha = \frac{\log(\|\bar{x}(t) - y_{n_1}(t)\|_{L^p}) - \log(\|\bar{x}(t) - y_{n_2}(t)\|_{L^p})}{\log(n_1) - \log(n_2)}. \quad (4.31)$$

In Abbildung 4.8 würden wir für $n_1 = 1$ und $n_2 = 9$ folgende Werte für α und somit für die Steigung im Schaubild bekommen:

- $\alpha_{L^2} = -1,46$ für $p = 2$
- $\alpha_{L^\infty} = -1,37$ für $p = \infty$.

Beispiel 2: $\int_0^1 \dot{x}^2 + x^2 dt$ mit $x(0) = 1$ und $x(1)$ beliebig. Die exakte Lösung lautet:

$$\bar{x}(t) = \frac{e^{-1}}{e + e^{-1}} e^t + \frac{e}{e + e^{-1}} e^{-t}.$$

Für die Herleitung der exakten Lösung $\bar{x}(t)$ siehe Appendix A.

Anbei die graphische Darstellung der Norm des Fehlers $\|\bar{x}(t) - y_n(t)\|_{L^p}$ für $p \in \{2, \infty\}$ sowohl für das Ritz'sche Verfahren als auch für das Endliche Differenzenverfahren.

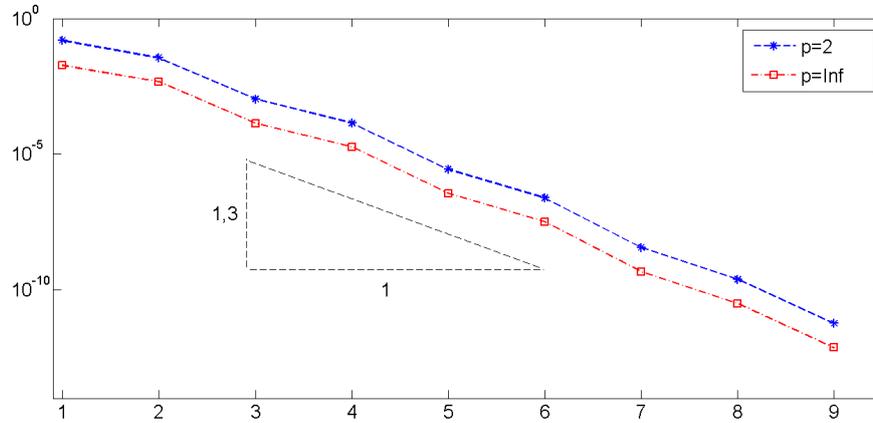


Abbildung 4.9.: Semi-logarithmische Darstellung der L^2 -Norm und der L^∞ -Norm des Fehlers für das Ritz'sche Verfahren für **Beispiel 2**

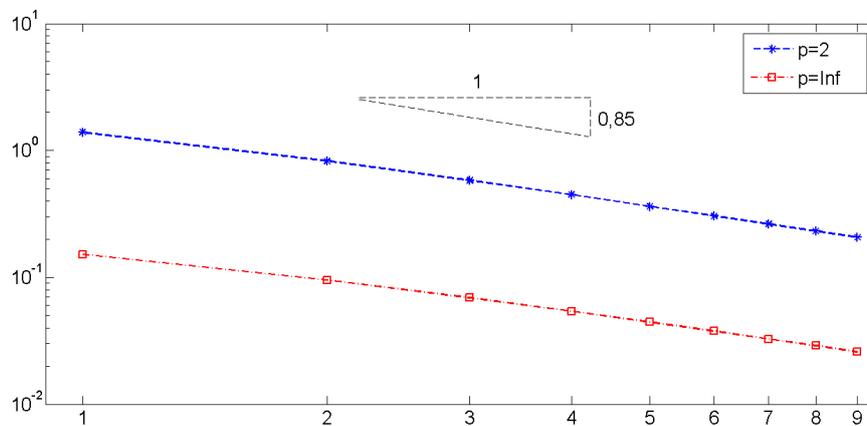


Abbildung 4.10.: Doppel-logarithmische Darstellung der L^2 -Norm und der L^∞ -Norm des Fehlers für das Endliche Differenzenverfahren für **Beispiel 2**

Auch hier lässt sich beim Ritz'schen Verfahren in Abbildung 4.9 einen linearen Zusammenhang zwischen $\log(\|\bar{x}(t) - y_n(t)\|_{L^p})$ und n vermuten, woraus sich ähnlich zu Abbildung 4.7 eine exponentielle Konvergenz der Folge der Näherungslösungen $\{y_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ schließen lässt. Mit $n_1 = 1$ und $n_2 = 9$ erhalten wir durch Einsetzen in Gleichung (4.28) die folgenden Werte für β :

- $\beta_{L^2} = -3,00$ für $p = 2$
- $\beta_{L^\infty} = -2,99$ für $p = \infty$.

Somit beträgt die Steigung der Graphen in Abbildung 4.9 etwa $\beta_{L^2} \log(e) \approx -1,304$ für $p = 2$ bzw. $\beta_{L^\infty} \log(e) \approx -1,299$ für $p = \infty$.

In Abbildung 4.10 hingegen wird $\log(\|\bar{x}(t) - y_n(t)\|_{L^p})$ bzgl. $\log(n)$ dargestellt, wobei hier $y_n(t)$ die Näherungslösung ist, welche aus dem Endlichen Differenzenverfahren gewonnen wird. Wir erkennen polynomial lineare Konvergenz gemäß Ungleichung (4.29) und erhalten hier die folgenden Werte für α :

- $\alpha_{L^2} = -0,87$ für $p = 2$
- $\alpha_{L^\infty} = -0,81$ für $p = \infty$

Es scheint, dass bei den bisherigen Beispielen das Ritz'sche Verfahren exponentiell konvergiert, während das Endliche Differenzenverfahren nur polynomial linear konvergiert und damit viel langsamer zu einer vergleichbar genauen Näherungslösung gelangt wie das Ritz'sche Verfahren.

Vorteile bietet das Endliche Differenzenverfahren zum Beispiel bei Funktionen mit Ecken, da durch das Ritz'sche Verfahren mit gegebenen glatten Funktionen nie eine Ecke repliziert werden kann. Dieser Sachverhalt wird durch das folgende Beispiel klar.

Beispiel 3: $\int_{-1}^1 x^2(1-x)^2 dt$ mit $x(-1) = 0$ und $x(1) = 1$. Die exakte Lösung lautet:

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-1, 0] \\ t, & t \in (0, 1], \end{cases}.$$

Für die Herleitung der exakten Lösung $\bar{x}(t)$ siehe Appendix B.

Zunächst ist einfach zu erkennen, dass $I(x(t)) \geq 0 \forall x(t) \in \Phi$ gilt, d.h. eine Lösung $\bar{x}(t)$ genügt $I(\bar{x}(t)) = 0$. Wählt man beim Endlichen Differenzenverfahren zunächst n ungerade, also $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Nun gilt

$$t_i = [-1, \underbrace{\dots}_k, 0, \underbrace{\dots}_k, 1].$$

Damit die Näherungslösung $y_n(t)$ des Endlichen Differenzenverfahrens einer Lösung $\bar{x}(t)$ entspricht, muss die folgende Gleichung erfüllt sein:

$$\sum_{i=0}^n f(t_i, x_i, \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i})(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^n x_i^2 \left(1 - \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i}\right)^2 \underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{\neq 0} = 0.$$

Es muss also entweder $x_i = 0$ oder $\frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} = 1$ für $i = 0, \dots, n$ gelten. Es ist allerdings nur möglich die Lösung $\bar{x}(t)$ exakt zu replizieren, sofern gilt

$$\exists k_0 \in \{0, 1, \dots, n+1\} : t_{k_0} = 0.$$

Man erkennt, dass für ungerade $n = 2k + 1$ gilt: $y_{2k+1}(t) = \bar{x}(t) \forall k \in \mathbb{N} \forall t \in [a, b]$.

Beim Ritz'schen Verfahren wird sich allerdings aufgrund der Glattheitseigenschaften der Näherungslösungen nie ein n_0 finden, sodass die Funktionen gleich sind.

An der stückweisen linearen Gestalt kann man feststellen, dass bei diesem Variationsproblem das Endliche Differenzenverfahren bessere Näherungslösungen liefert als das Ritz'sche Verfahren. Man erkennt hierbei deutlich den Nachteil des Ritz'schen Verfahrens, und zwar die Nichtreplizierbarkeit von Ecken. Bei Anwendung des Endlichen Differenzenverfahrens für gerade $n \in \mathbb{N}$ entspricht die Näherungslösung sogar der exakten Lösung.

Wir sehen deutlich, dass an diesem Beispiel das Ritz'sche Verfahren sehr viel schneller konvergiert als das Endliche Differenzenverfahren.

Vorteile bietet das Endliche Differenzenverfahren zum Beispiel bei Funktionen mit Ecken, da durch das Ritz'sche Verfahren mit gegebenen glatten Funktionen nie eine Ecke repliziert werden kann.

5. Fazit

Ziel der vorliegenden Diplomarbeit war es, einen vollständigen und kompakten Überblick über verschiedene Lösungsmöglichkeiten im Bereich der Variationsrechnung zu geben und diese möglichst effizient zu implementieren. Desweiteren war wichtig zu sehen, unter welchen Bedingungen und in welchen Räumen überhaupt Lösungen für gewisse Variationsprobleme existieren und durch welche Verfahren man diese durch vorgegebene Algorithmen lösen kann.

Grundsätzlich unterscheidet man zwei verschiedene Verfahren, um zur Lösung eines Variationsproblems zu gelangen. Einerseits ist dies über die in Kapitel 2 diskutierten Eulerschen Differentialgleichungen möglich, sofern diese - abhängig vom Variationsfunktional - explizit nach der gesuchten Funktion $\bar{x}(t)$ lösbar sind. Außerdem kann für ein einfaches Variationsproblem auch mit numerischen Methoden eine Folge von Näherungslösungen $\{y_n(t)\}$ konstruiert werden, welche gegen eine potentielle exakte Lösung konvergiert. Hierfür stehen zwei zentrale Verfahren im Mittelpunkt dieser Diplomarbeit: die Ritz'sche Methode, welche die Lösungsfunktion als Linearkombination von glatten Funktionen approximiert; und das Endliche Differenzenverfahren, wohingegen die Lösung als Polygonzug dargestellt und optimiert wird. Mit beiden vorgestellten Verfahren können sowohl Variationsprobleme mit beidseitig gegebenen Randbedingungen als auch mit natürlichen und transversalen Randbedingungen gelöst werden. Während das Ritz'sche Verfahren seine Vorteile in der Konvergenzgeschwindigkeit hat, besitzt das Endliche Differenzenverfahren seine Stärken bei Variationsproblemen, deren Lösungsfunktion nur stückweise differenzierbar ist und somit Ecken hat.

Bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit haben wir herausgefunden, dass das Ritz'sche Verfahren vermutlich exponentiell konvergiert und sich somit die Norm des Fehlers $\|y_n(t) - \bar{x}(t)\|_{L^p}$ bei gegebenem Diskretisierungsparameter n durch $c \cdot e^{\beta n}$ abschätzen lässt. Das Endliche Differenzenverfahren scheint „nur“ näherungsweise polynomial li-

near zu konvergieren und der Fehler lässt sich somit durch $c \cdot n^\alpha$ abschätzen. Je nach Variationsproblem und somit abhängig von den Randbedingungen und dem Variationsfunktional ergeben sich unterschiedliche Werte für die Konstanten α, β und c , die ebenfalls von der Wahl der geeigneten Norm abhängen.

Selbstverständlich führen numerische Methoden nur zum Erfolg, sofern überhaupt eine Lösung eines Variationsproblems existiert. Hierfür konnten wir für die Klasse der konvexen Variationsprobleme hinreichende Bedingungen erarbeiten, um die Existenz einer Lösung zu garantieren. Hier beschäftigten wir uns großteils mit halbstetigen, konvexen Funktionalen in Sobolevräumen, da in diesen Räumen geeignete Kompaktheitskriterien konsturiert werden können. Wir wissen nun, dass bei Forderung von Unterhalbstetigkeit, Konvexität und Koerzivität des Variationsfunktionals die Existenz einer Lösung garantiert werden kann. So existiert sogar eine eindeutige Lösung, sofern wir strikte Konvexität fordern. Liegt uns also ein Variationsproblem vor, so sollte im Idealfall zunächst geprüft werden, ob überhaupt eine Lösung existiert, um die Anwendung der numerischen Verfahren `R.m` und `ED.m` problemlos durchführen zu können. Selbstverständlich ist es ebenfalls möglich, hinreichende Bedingungen für die Existenz von Lösungen für nichtkonvexe Variationsprobleme herauszuarbeiten, was Thema einer anschließenden Arbeit sein kann.

Dass numerische Verfahren zur Bestimmung der Lösung nicht bei jedem Variationsproblem anwendbar sind, erkennen wir an den in Kapitel 2 betrachteten Beispielen. So können z.B. Variationsprobleme mit isoperimetrischen Nebenbedingungen¹ nicht mittels numerischer Algorithmen gelöst werden; hier muss der Weg direkt über die Differentialgleichung gegangen werden. Dasselbe gilt für das Brachistochronen-Problem. Auch hier führen die klassischen Methoden zu einer Lösung, welche sich als Zykloidenbogen durch Start- und Endpunkt darstellen lässt.²

Es lässt sich abschließend sagen, dass man bei einem Variationsproblem mit unbekannter Lösung zunächst nicht weiß, ob das Ritz'sche Verfahren oder das Endliche Differenzenverfahren Vorteile bietet. Daher würde es sich anbieten, die beiden Algorithmen `R.m` und `ED.m` in Matlab bis zu einer hinreichend genauen Näherungslösung zu durchlaufen, um anschließend eventuell die Gestalt der Lösung erkennen zu können.

¹siehe z.B. das Problem der Dido in Abschnitt 2.1.2.

²Herleitung der Lösung in Form eines Zykloidenbogens siehe Appendix B.

A. Appendix: Herleitungen

Herleitung für die exakte Lösung des Variationsproblems auf S.70:

$$\int_0^1 (\dot{x}^2 - x^2 - 2tx) dt \text{ mit } x(0) = 0, x(1) = 0.$$

Mittels der Eulerschen Differentialgleichung (2.13) folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} 2\dot{x} = -2x - 2t \quad \Rightarrow \quad 2\ddot{x} = -2x - 2t \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -x - t.$$

Ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $\ddot{x} = -x$ ist gegeben durch $\sin(t), \cos(t)$ und da zusätzlich gilt $\frac{\partial^2}{\partial t^2} t = 0$ hat die Lösung $\bar{x}(t)$ die folgende Gestalt:

$$\bar{x}(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) - t.$$

Aus den Randbedingungen ergeben sich nun

$$\begin{aligned} \bar{x}(0) = 0 &\Rightarrow c_2 = 0 \\ \bar{x}(1) = 0 &\Rightarrow c_1 \sin(1) - 1 = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\sin(1)}. \end{aligned}$$

Die exakte Lösung $\bar{x}(t)$ des Variationsproblems lautet

$$\bar{x}(t) = \frac{\sin(t)}{\sin(1)} - t.$$

Herleitung für die exakte Lösung des Variationsproblems auf S.73:

$$\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2) dt \text{ mit } x(0) = 1, x(1) \text{ beliebig.}$$

Eulersche Differentialgleichung führt zu

$$\frac{\partial}{\partial t} 2\dot{x} = 2x \quad \Rightarrow \quad 2\ddot{x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = x.$$

Ein Fundamentalsystem dieser Differentialgleichung ist gegeben durch e^t, e^{-t} und daher hat die Lösung $\bar{x}(t)$ folgende Gestalt:

$$\bar{x}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Aus der Randbedingung $x(0) = 1$ ergibt sich nun

$$\bar{x}(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = 1.$$

Durch die natürliche Randbedingung für $x(1)$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &= f_{\dot{x}}(1, x(1), \dot{x}(1)) = 2\dot{x}(1) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(1) = 0 \\ &\Rightarrow \dot{x}(1) = c_1 e - c_2 e^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 e = (1 - c_1) e^{-1} \\ &\Rightarrow e^2 = \frac{1}{c_1} - 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{e^2 + 1} = 1 - \frac{e}{e + e^{-1}} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{e}{e + e^{-1}}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die exakte Lösung

$$\bar{x}(t) = \left(1 - \frac{e}{e + e^{-1}}\right) e^t + \frac{e}{e + e^{-1}} e^{-t}.$$

Herleitung für die exakte Lösung des Variationsproblems auf S.76:

$$\int_{-1}^1 x^2(1 - \dot{x})^2 dt \text{ mit } x(-1) = 0 \text{ und } x(1) = 1.$$

Da ein autonomes Variationsproblem vorliegt, gilt nach S.14:

$$\dot{x}f_{\dot{x}} - f \equiv \text{const.}$$

$$\iff \dot{x}x^2(-2 + 2\dot{x}) - x^2(1 - \dot{x})^2 \equiv \text{const.}$$

$$\iff x^2(\dot{x}^2 - 1) \equiv \text{const.}$$

Mit der gegebenen Randbedingung $x(-1) = 0$ folgt $c = 0$ und daraus folgt $x(t) = 0$ oder $\dot{x}(t) = \pm 1$.

$$\implies \text{Lösung } \bar{x}(t) \text{ hat eine Ecke an der Stelle } t_0 = 0$$

$$\implies \bar{x}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-1, 0] \\ t, & t \in (0, 1] \end{cases} .$$

B. Appendix: Lösung des Brachistochronen-Problems

Um zu einer Lösung des Brachistochronenproblems

$$I(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2gy}} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \rightarrow \min$$

zu gelangen, geht man den Weg über die Eulersche Differentialgleichung. Aufgrund der Gestalt als autonomes Variationsproblem folgt aus $(y' f_{y'} - f) = \text{const.}$

$$\begin{aligned} y' \cdot \frac{1}{\sqrt{2gy}} \frac{2y'}{2\sqrt{1+y'^2}} - \frac{1}{\sqrt{2gy}} \sqrt{1+y'^2} &= \frac{1}{c} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - \sqrt{1+y'^2} \right)^2 &= \frac{2gy}{c^2} \\ \Leftrightarrow \frac{y'^4}{1+y'^2} - 2y'^2 + 1 + y'^2 &= \frac{y'^4}{1+y'^2} + \frac{1-y'^4}{1+y'^2} = \frac{1}{1+y'^2} = \frac{2gy}{c^2} \\ \Leftrightarrow y(1+y'^2) &= \frac{c^2}{2g}. \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung beschreibt eine Zykloidenbahn, wobei die Parameterdarstellung mit den Anfangswerten $x(0) = x_1$ und $y(0) = y_1$ wie folgt aussieht:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1 + \frac{c^2}{4g}(t - \sin(t)) \\ y(t) &= y_1 - \frac{c^2}{4g}(1 - \cos(t)). \end{aligned}$$

Die Konstante c muss nun so gewählt werden, dass der Zykloidenbogen mit Radius $\frac{c^2}{4g}$ durch den Endpunkt (x_2, y_2) geht. Sind sowohl Start- und Endpunkt gegeben, so kann durch die beiden Gleichungen ebenfalls die kürzeste Durchlaufzeit t^* berechnet werden.

Literaturverzeichnis

- [Adams und Fournier 2003] ADAMS, Robert ; FOURNIER, John: *Sobolev spaces*. Academic Press, 2003. – ISBN 0-12-044143-8
- [Baur 1998] BAUR, Gerhard: *Einführung in die Variationsrechnung*. Vorlesungsskript 1998, Universität Ulm, 1998
- [Dacorogna 2008] DACOROGNA, Bernard: *Direct Methods in the Calculus of Variations*. Bd. 2. Springer, 2008
- [Diestel 1984] DIESTEL, Joseph: *Sequences and series in Banach spaces*. Springer, 1984. – 17–23 S. – ISBN 3-540-90859-5
- [Evans 2010] EVANS, Lawrence C.: *Partial Differential Equations*. Bd. 2. American Mathematical Society, 2010
- [Funk 1970] FUNK, Paul: *Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik*. Bd. 2. Springer, 1970
- [Goldstine 1980] GOLDSTINE, Herman H.: *A history of the calculus of variations - From the 17th through the 19th century*. Springer, 1980
- [Heuser 2003] HEUSER, Harro: *Lehrbuch der Analysis - Teil 1*. B.G. Teubner GmbH, 2003. – ISBN 3-519-62233-5
- [Intriligator 1971] INTRILIGATOR, Michael D.: *Mathematical Optimization and Economic Theory*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971. – 291–325 S
- [Kielhöfer 2010] KIELHÖFER, Hansjörg: *Variationsrechnung*. Bd. 1. Vieweg + Teubner Verlag, 2010. – ISBN 978-3-8348-0965-0
- [Meyberg und Vachenaue 2006] MEYBERG, Kurt ; VACHENAUER, Peter: *Höhere Mathematik 2*. Bd. 4. Berlin Heidelberg New York : Springer, 2006. – ISBN 3-540-41851-2

- [Reed und Simon 1980] REED, Michael ; SIMON, Barry: *Methods of Modern Mathematical Physics 1: Functional Analysis I*. Academic Press, 1980. – ISBN 0-12-585050-6
- [Ritz 1909] RITZ, Walter: *Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik*. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 1909. – URL http://gdz.sub.uni-goettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=261182
- [Ruzicka 2007] RUZICKA, Michael: *Funktionalanalysis I*. Vorlesungsskript WS2006/2007, Universität Freiburg, 2007. – 67 S. – URL http://aam.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/fa1_ws06/kap3.pdf
- [Seiler 2005] SEILER, Jörg: *Einführung in die Variationsrechnung*. Vorlesungsskript SS2005, Leibniz Universität Hannover, 2005. – 3 S
- [Werner 2005] WERNER, Dirk: *Funktionalanalysis*. Bd. 5. Berlin Heidelberg New York : Springer, 2005. – ISBN 3-540-21381-3
- [Yaari 1965] YAARI, Menahem: *Uncertain Lifetime, Life Insurance, and the Theory of the Consumer*. Bd. 32. The Review of Economic Studies, 1965. – 137–150 S. – URL <http://www.jstor.org/stable/2296058>

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre hiermit ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ich bin mir bewusst, dass eine unwahre Erklärung rechtliche Folgen haben wird.

Ulm, den 4. April 2012

(Unterschrift)