

Übungsblatt 6
(Abgabe: Freitag, 13.07.2012 um 8 Uhr vor der Übung)

Aufgabe 15 (Bernstein-Polynome)

(6 Punkte)

Soll eine glatte Kurve erzeugt werden (z.B. in der Computergrafik), so könnte man mit interpolierenden Polynomen oder Splines arbeiten und den Verlauf der Kurve über die zu interpolierenden Paare (x_i, f_i) steuern. Interpolationspolynome und auch interpolierende Splines können allerdings negativ werden, selbst wenn alle $f_i \geq 0$ sind. Um dies zu vermeiden, verwendet man die *Bernstein-Polynome* n -ten Grades,

$$B_i^n(t) := \frac{n!}{i!(n-i)!} (1-t)^{n-i} t^i, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad t \in I := [0, 1].$$

Offensichtlich hat B_i^n eine i -fache Nullstelle bei $t = 0$ und eine $(n-i)$ -fache Nullstelle bei $t = 1$. Zeigen Sie:

- $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$ für $i = 0, 1, \dots, n; t \in I$. ①
- $(1-t)B_0^n(t) = B_0^{n+1}(t)$ und $tB_n^n(t) = B_n^{n+1}(t)$. ①
- B_i^n ist nichtnegativ auf I und hat für $i = 1, \dots, n-1$ im Intervall I genau ein Maximum bei $t = i/n$. ②
- Die Bernstein-Polynome genügen für $i = 1, \dots, n-1$ der rekursiven Vorschrift

$$B_i^n(t) = tB_{i-1}^{n-1}(t) + (1-t)B_{i+1}^{n-1}(t). \quad \text{①}$$

(e) Die Ableitung der Bernstein-Polynome für $i = 1, \dots, n-1$ genügt der rekursiven Vorschrift

$$(B_i^n(t))' = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_{i+1}^{n-1}(t)). \quad \text{①}$$

Eine Kurve x im $\mathbb{R}^k$ kann man nun mit

$$x(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t), \quad t \in I,$$

erzeugen und ihren Verlauf über die $b_i \in \mathbb{R}^k, i = 0, \dots, n$ steuern. Eine solche Kurve nennt man auch *Bezier-Kurve*, die b_i *Bezier-Punkte*. Achtung: Die Kurve x interpoliert *nicht* die Punkte b_i !

Aufgabe 16 (Interpolation with cubic splines)

(4+4 Punkte)

Construct a clamped cubic spline $s(x)$ which interpolates

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sin(\pi x)$$

at the points $-1, 0, 1$ so that $s'(-1) = f'(-1)$ and $s'(1) = f'(1)$. This exercise has to be written in L^AT_EX.

Aufgabe 17 (Spline-Bestimmung)

(6 Punkte)

- Gegeben seien die drei Stützstellen $x_0 = (0, 0)$, $x_1 = (1, t)$ und $x_2 = (2, 0)$, mit $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die zugehörige lineare Spline-Interpolationsfunktion $s_1(x) \in C^0[0, 2]$.
- die zugehörige kubische Spline-Interpolationsfunktion $s_3(x) \in C^3[0, 2]$ unter Annahme natürlicher Randbedingungen in Abhängigkeit von dem reellen Parameter t . Zeichnen Sie die Funktionen für $t = 2$.

Aufgabe 18 (Fehlerabschätzung für lineare Splines)

(4 Punkte)

Sei $f \in C^3(a, b)$ und s der interpolierende lineare Spline zu einem Gitter $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$. Es bezeichnen $h_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, \dots, n$, die Längen der Teilintervalle und $h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$ die Gitterweite von Δ . Zeigen Sie, dass für die Maximumnorm $\|\cdot\|_{[a,b]}$ über dem Intervall $[a, b]$ gilt

$$\|f - s\|_{[a,b]} \leq \frac{1}{8} h^2 \|f'''\|_{[a,b]}.$$

Aufgabe 19 (Approximation mit linearen Splines)

(6 Punkte)

Betrachten Sie die äquidistante Zerlegung des Intervalls $[0, 1]$ durch die Punkte $x_i = \frac{i}{n}, i = 0, \dots, n$. Sei $s(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k N_k(x)$ ein linearer Spline mit den Hutfunktionen $N_k, k = 0, \dots, n$ als Basisfunktionen. Dieser Spline soll eine gegebene Funktion f nun im Integralmittel möglichst gut approximieren, d.h. der Wert $\int_0^1 (f(x) - s(x))^2 dx$ soll minimal werden. Zeigen Sie, dass die Koeffizienten $\alpha = (\alpha_k)_{0 \leq k \leq n}$ des so definierten Splines s das Gleichungssystem $A\alpha = b$ erfüllen, wobei für $0 \leq i, j \leq n$

$$A_{ij} = \int_0^1 N_i(x) N_j(x) dx, \quad b_i = \int_0^1 f(x) N_i(x) dx$$

gilt. Berechnen Sie A in Abhängigkeit von $h = \frac{1}{n}$.

15]

Bsp: $B_i^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} (1-t)^{n-i} t^i, i=0,1,\dots,n, t \in I := [0,1]$

"Bernstein-Polynome n-ten Grades"

a) z.z: $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t), i=0,\dots,n, t \in I$

Bew: $B_{n-i}^n(1-t) = \frac{n!}{(n-i)!i!} \left(1 - (1-t)\right)^i (1-t)^{n-i} = B_i^n(t)$

b) z.z: $(1-t)B_i^n(t) = B_{i+1}^{n+1}(t)$

Bew: $B_{i+1}^{n+1}(t) = \frac{(n+1)!}{(i+1)!(n-i)!} (1-t)^{n-i} t^{i+1} = (1-t)B_i^n(t)$

$B_0^n(t) = \frac{n!}{0!n!} (1-t)^n t^0 = (1-t)^n \Rightarrow \text{Bern.}$

c) $B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \geq 0 \text{ f\"ur } t \in [0,1]$
 $\geq 0 \quad \begin{matrix} \geq 0 \\ t \in [0,1] \end{matrix}$

und f\"ur $i=1,\dots,n-1$ gilt:

$(B_i^n(t))' = \binom{n}{i} \left[(n-i)(1-t)^{n-i-1} (-1) t^i + (1-t)^{n-i} i t^{i-1} \right]$
 $= \binom{n}{i} (1-t)^{n-i-1} t^{i-1} \left[-(n-i)t + (1-t)i \right]$
 $= \binom{n}{i} (1-t)^{n-i-1} t^{i-1} (i-n+t)$

Also $(B_i^n(t))' = 0 \Leftrightarrow t=1, t=0 \text{ oder } t=\frac{i}{n}$

Wegen $B_i^n(0) = B_i^n(1) = 0$

f\"ur $n \neq i$ f\"ur $n \neq i$

und $B_i^n(t) \geq 0, t \in [0,1]$

$B_i^n(\frac{i}{n}) > 0 = B_i^n(0) = B_i^n(1)$

ist max. n-male NS

B_i^n stetig

$\Rightarrow$ f\"ur kompakt

$\Rightarrow$ min-max existieren auf $[0,1]$

a) z.z: $B_i^n(t) = B_{i-1}^{n-1}(t) + (1-t)B_i^{n-1}(t), i=1,\dots,n-1$

Bew: $B_{i-1}^{n-1}(t) + (1-t)B_i^{n-1}(t)$
 $= \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} (1-t)^{n-i} t^{i-1} + (1-t) \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} (1-t)^{n-i-1} t^i$
 $= \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i-1)!} (1-t)^{n-i-1} t^{i-1} \left[\frac{1}{n-i} + \frac{1}{i} \right]$
 $= \frac{n!}{i!(n-i)!} (1-t)^{n-i} t^{i-1} = B_i^n(t)$

~~z.z: $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$ bzw. $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i = 1$ (binomische Formel)~~

$$c) \quad z.z: \quad (B_i^n(t))' = n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \quad , i=1, \dots, n-1$$

Bew: Nach c) gilt

$$\left[(B_i^n(t))' = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i-1} + i \binom{n}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{n-i} \right]$$

Mit der Def der Bernstein-Polynome folgt

$$B_i^{n-1}(t) = \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} (1-t)^{n-i-1} + \frac{i!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i}$$

$$B_{i-1}^{n-1}(t) = \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} (1-t)^{n-i} + \frac{i!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i-1}$$

also

$$n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) = n \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i-1)!} (1-t)^{n-i-1} + i \binom{n}{i-1} \left[\frac{1}{n-i} (1-t)^{n-i-1} - t^{i-1} \right]$$

$$= \frac{n!}{i!(n-i)!} i \binom{n-1}{i-1} (1-t)^{n-i-1} + i \binom{n}{i-1} \left[\frac{i(1-t) - (n-i)t}{(n-i)!} \right]$$

$$= \binom{n}{i} (1-t)^{n-i-1} + i \binom{n}{i-1} \left(\frac{i-i-t+t+i-t}{n-i} \right)$$

$$= i - n + t$$

$$\stackrel{c)}{=} (B_i^n(t))'$$

Kubische Spline-Interpolation

Sei $\Delta := \{a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$

Def: $S_\Delta := \{s \in C^2[a,b] \mid s|_{[x_{j-1}, x_j]} \in \mathbb{P}_3, 1 \leq j \leq n\}$

ges: se S_Δ mit $s(x_j) = y_j, 0 \leq j \leq n$

Wie erhält man s ?

- Lsg: s ist stückw. kubisch
- s^j " " quadratisch
- s'' " " linear

Welche Momente $M_j := s''(x_j)$ als Unbekannte.

Für $x \in [x_{j-1}, x_j]$ gilt dann

$$s''(x) = \frac{1}{h_j} M_{j-1} (x_j - x) + \frac{1}{h_j} M_j (x - x_{j-1}) \quad \text{mit } h_j = x_j - x_{j-1}$$

Stetigkeit von $s'(x) \Rightarrow$ Integration möglich $\Rightarrow$ für $x \in [x_{j-1}, x_j]$ gilt

$$s(x) = M_{j-1} \frac{1}{6} h_j (x_j - x)^3 + M_j \frac{1}{6} h_j (x - x_{j-1})^3 + \alpha_j (x - x_{j-1}) + \beta_j (x - x_{j-1})^2$$

Integriert bed. einsetzen: $s(x_{j-1}) = y_{j-1} \Rightarrow \alpha_j = \frac{1}{h_j} (y_{j-1} - M_{j-1} \frac{1}{6} h_j^3)$

$$s(x_j) = y_j \Rightarrow \beta_j = \frac{1}{h_j} (y_j - M_j \frac{1}{6} h_j^3)$$

Stetigkeitsbed. $s'(x_j+0) = s'(x_j-0)$ einsetzen

$\Rightarrow$ Man hat $n-1$ Gleichungen mit $n+1$ Unbekannten

Zusatzbedingungen:

(a) $s'(a) = y'_0, s'(b) = y'_n$ vollst. KGS (angegabene Rand

(b) $s''(a) = s''(b) = 0$ natürliche KGS

(c) $s^{(j)}(a) = s^{(j)}(b)$ für $j=0,1,2 \rightarrow$ periodische Spline

$$(\Rightarrow y_0 = y_n, \dots)$$

Aussehen der Koeff.-Matrizen:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} h_1 & \frac{1}{6} h_2 \\ \frac{1}{6} h_2 & \frac{1}{3} h_3 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_0 \\ y_2 - y_1 \\ \vdots \end{pmatrix} =: c_n$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} h_1 & \frac{1}{6} h_2 \\ \frac{1}{6} h_2 & \frac{1}{3} h_3 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_0 \\ y_2 - y_1 \\ \vdots \end{pmatrix} =: c_n$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} h_1 & \frac{1}{6} h_2 & \frac{1}{6} h_3 \\ \frac{1}{6} h_2 & \frac{1}{3} h_3 & \frac{1}{6} h_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_0 \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - y_2 \end{pmatrix}$$

Samtliche Matrizen sind strikt diagonaldominant, symm. + pos. def. Insbesondere heißt das Problem der kubischen Spline-Interpolation in den Fällen (a)-(c) stets genau eine Lsg.

16]

Geg:

x_i	x_0	x_1	x_2
	-1	0	1
$f(x_i)$	0	0	0
	y_0	y_1	y_2

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sin(\pi x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cos(\pi x)$$

Ges: + in $-1, 0, 1$ interpolierender kubischer Spline mit vgl. RGS

Lsg: vgl. RGS:

$$S'(-1) = f'(-1) = \frac{1}{2} \cos(-\pi) = -\frac{1}{2} = y_0'$$

$$S'(1) = f'(1) = \frac{1}{2} \cos(\pi) = -\frac{1}{2} = y_2'$$

Fall (a): mit $h_1 = h_2 = 1$ bzw

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}h_1 & \frac{1}{6}h_1 & 0 \\ \frac{1}{6}h_1 & \frac{1}{3}(h_1+h_2) & \frac{1}{6}h_2 \\ 0 & \frac{1}{6}h_2 & \frac{1}{3}h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_0 \\ \frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1} \\ y_2' - \frac{y_2 - y_1}{h_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_0 = \frac{3}{2}, M_1 = 0, M_2 = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{h_1} (y_0 - M_0 \frac{1}{6} h_1^2) = -\frac{1}{4}, \alpha_2 = \frac{1}{h_2} (y_1 - M_1 \frac{1}{6} h_2^2) = 0$$

$$\beta_1 = \frac{1}{h_1} (y_1 - M_1 \frac{1}{6} h_1^2) = 0, \beta_2 = \frac{1}{h_2} (y_2 - M_2 \frac{1}{6} h_2^2) = \frac{1}{4}$$

Also für $x \in [x_0, x_1] = [-1, 0]$:

$$S(x) = M_0 \frac{1}{6h_1} (x_1 - x)^3 + M_1 \frac{1}{6h_1} (x - x_0)^3 + \alpha_1 (x_1 - x) + \beta_1 (x - x_0)$$

$$= -\frac{1}{4} x^3 + \frac{1}{4} x$$

und für $x \in [x_1, x_2] = [0, 1]$:

$$S(x) = M_1 \frac{1}{6h_2} (x_2 - x)^3 + M_2 \frac{1}{6h_2} (x - x_1)^3 + \alpha_2 (x_2 - x) + \beta_2 (x - x_1)$$

$$= -\frac{1}{4} x^3 + \frac{1}{4} x$$

$$\Rightarrow S(x) = -\frac{1}{4} x^3 + \frac{1}{4} x \quad \text{für } x \in [-1, 1]$$

17]

b)

$$\text{Geg: } x_0 = 0, y_0 = 0$$

$$x_1 = 1, y_1 = 1, t \in \mathbb{R}$$

$$x_2 = 2, y_2 = 0$$

Ges: angelegener kubischer Spline mit vorgegebenen RGS, d.h.

$$S'(x_0) = S'(x_2) = 0$$

$$\text{Lsg: Fall (b): } M_0 = M_2 = 0$$

$$\text{bzw } \frac{1}{3}(h_1 + h_2) M_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1}$$

$$\text{also mit } h_1 = h_2 = 1:$$

$$\frac{2}{3} M_1 = -1 + 1 = -2 + \Rightarrow M_1 = -3 +$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{h_1} (y_0 - H_0 \frac{1}{6} h_1^2) = 0, \quad \alpha_2 = \frac{1}{h_2} (y_1 - H_1 \frac{1}{6} h_2^2) = \frac{3}{2} +$$

$$\beta_1 = \frac{1}{h_1} (y_1 - H_1 \frac{1}{6} h_1^2) = \frac{3}{2} +, \quad \beta_2 = \frac{1}{h_2} (y_2 - H_2 \frac{1}{6} h_2^2) = 0$$

also für $x \in [x_0, x_1] = [0, 1]$:

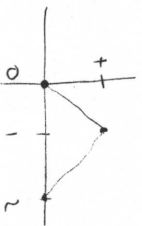
$$s(x) = H_0 \frac{1}{6h_1} (x_1 - x)^3 + H_1 \frac{1}{6h_1} (x - x_0)^3 + \alpha_1 (x_1 - x) + \beta_1 (x - x_0) \\ = -\frac{1}{2} x^3 + \frac{3}{2} x$$

und für $x \in [x_1, x_2] = [1, 2]$:

$$s(x) = H_1 \frac{1}{6h_2} (x_2 - x)^3 + H_2 \frac{1}{6h_2} (x - x_1)^3 + \alpha_2 (x_2 - x) + \beta_2 (x - x_1) \\ = \frac{1}{2} x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2} x - 1$$

a) Geg: Punkte $(0, 0), (1, 1), (2, 0)$

Ges: zugehörige lineare Spline



Lsg: Gerade durch $(0, 0), (1, 1)$: $g_1(t) = t + x$

Gerade durch $(1, 1), (2, 0)$: $g_2(t) = -t + x + 2$

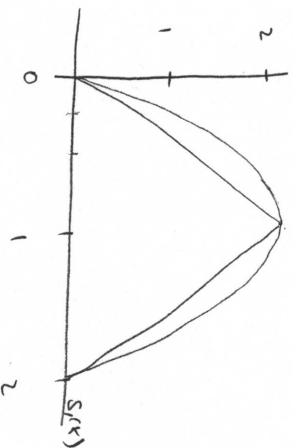
also ist der zugehörige lineare Spline gegeben durch

$$s_1(x) = \begin{cases} t + x, & x \in [0, 1] \\ -t + x + 2, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

$t=2$:

$$s_1(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1] \\ -2x + 4, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

$$s(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x, & x \in [0, 1] \\ x^3 - 6x^2 + 9x - 2, & x \in [1, 2] \end{cases}$$



B)

Geg: $\Delta = \{a = x_0 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}, f \in C^2(a, b)$

S zugehöriger lineare Spline

$$h_i := x_i - x_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad h_i = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$$

$$\underline{Z.z.} \quad \|f - s\|_{[a,b]} \leq \frac{1}{8} h^2 \|f''\|_{[a,b]}$$

Bew: Wir betrachten ein Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$. Sei p_i der lineare

Interpolant zu f auf $[x_{i-1}, x_i]$. Dann gilt:

$\forall x \in [x_{i-1}, x_i] \exists \xi \in [x_{i-1}, x_i]$ mit

$$f(x) - p_i(x) = \frac{f''(\xi)}{2} (x - x_{i-1})(x - x_i)$$

$$\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x) - p_1(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f''(\xi)| (x - x_{i-1})(x - x_i)$$

$$= \left| \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2} - x_{i-1} \right) \left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2} - x_i \right) \right| = \frac{1}{4} h_i^2$$

$$\|x_1, \dots, x_n\|_2^2 = 1 - \varepsilon$$

begin $sa(x) = p_i(x)$ at $\log(x)$

$$\|f - s\|_{[a,b]} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \|f - p_i\|_{[x_{i-1}, x_i]} \leq \frac{1}{8} h^2 \|f''\|_{[a,b]}$$

$$h(x) := (x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$$

$$\begin{aligned} h(x) &= 2x - (ax+b) \\ &= 0 \quad (1) \\ x &= x_0 \\ \frac{2}{3} & \end{aligned}$$

$$h''(x) = 2 > 0$$

$$\max_{x \in [a,b]} f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in [a,b]$$

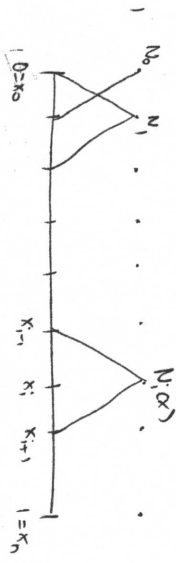
$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} 0 \geq h(x) \geq h(x_0) \quad \text{and} \quad 0 \leq |h(x)| \leq |h(x_0)| \end{aligned} \right\}$$

191

Bsp: Äquidistanz Teilung von $[0,1] \rightarrow x_i = \frac{i-1}{n}, i=0, \dots, n$

$$S(x) = \sum_{i=0}^n c_i N_i(x) \quad \text{lineare Spline mit } n+1 \text{ Stützstellen}$$



studies. etc, linear

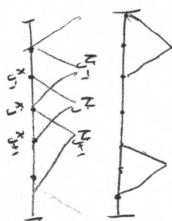
$$h_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{Ges. } \alpha = (\alpha_u)_{u \in U \cap n} \text{ mit } J(\alpha) := \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{u \in U} \alpha_u h_u(x) \right)^2 dx \rightarrow \min$$

$$= - \int_0^1 \frac{\partial \tilde{J}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_j} = - \int_0^1 2 \left(f(\tilde{x}) - \sum_{i \in \mathcal{N}} \alpha_i u_i(\tilde{x}) \right) \tilde{w}_j(\tilde{x}) d\tilde{x} = 0$$

$$\Rightarrow (A_k)_j = \sum_{i=0}^c A_{ijk} x_i = \sum_{i=0}^c \alpha_i \int_0^1 M_k(x) N_j(x) dx = \int_0^1 f(x) N_j(x) dx =: b_j$$

$$h = \frac{1}{n} \Rightarrow x_j = jh$$



$$A_{jk} = \int_0^1 N_k(x) N_j(x) dx$$

$$j=k \notin \{0, n\} : A_{jj} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} \right)^2 dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} \right)^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} \left(\frac{x-x_{j-1}}{h} \right)^3 \right]_{x_{j-1}}^{x_j} + \left[\frac{1}{3} \left(\frac{x_{j+1}-x}{h} \right)^3 \right]_{x_j}^{x_{j+1}}$$

$$= \frac{1}{3}h + \frac{1}{3}h = \frac{2}{3}h$$

$$j=k=0 : A_{00} = \int_{0=x_0}^{x_1} \left(\frac{x_1-x}{x_1-x_0} \right)^2 dx = \left[\frac{1}{3} \left(\frac{x_1-x}{h} \right)^3 (-h) \right]_{0=x_0}^{x_1} = \frac{1}{3}h$$

$$j=k=n : A_{nn} = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left(\frac{x-x_{n-1}}{h} \right)^2 dx = \frac{1}{3}h$$

$$k=j-1 : A_{j,j-1} = \int_0^1 N_{j-1} N_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\frac{x_j-x}{x_j-x_{j-1}} \right) \left(\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} \right) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} \right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{6} (x-x_{j-1})^3 \right]_{x_{j-1}}^{x_j} = \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{6} h^3 \right] = \frac{1}{6}h$$

$$k=j+1 : A_{j,j+1} = \int_0^1 N_{j+1} N_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} \right) \left(\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j} \right) dx = \frac{1}{6}h$$

$$\text{Summation: } A_{jj} = 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/6 \\ -1/2 & 2/3 & -1/6 \\ 1/6 & -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$