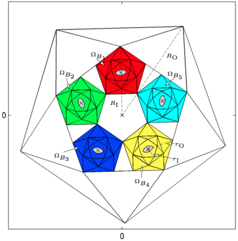
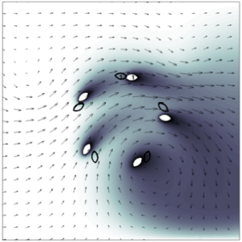
Seminar “Reduzierte Basis Methoden”

Prof. Dr. Karsten Urban / Sebastian Kestler
Institut für Numerische Mathematik, Universität Ulm
SoSe 2012





Abbildungen: *Reduced-Basis Method (RBM) for Non-Affine Elliptic Parametrized PDEs*, Timo Tonn, PhD Thesis 2011

Inhalte sind:

- Numerik von parametrisierten partiellen Differentialgleichungen.
- Techniken zur Modellreduktion, insbesondere Reduzierte Basis Methoden.
- Echtzeit-Anwendungen und Optimierungsprobleme.

- Master Studierende aller mathematischen Fachrichtungen.
- Hilfreiche Vorkenntnisse: Numerik, partielle Differentialgleichungen, Funktionalanalysis.
- Anmeldung: sebastian.kestler@uni-ulm.de oder in Raum E.014 He 22.
- Vorbesprechung und Themenvergabe: **16.2., 15:00 in Raum 2.02 He 22**.

Seminar “Reduzierte Basis Methoden”

ulm university universität uulm

Prof. Dr. Karsten Urban / Sebastian Kestler
Institut für Numerische Mathematik, Universität Ulm
SoSe 2012

Scheinkriterien:

- Selbständiges Erarbeiten eines aktuellen Themas aus dem Bereich der numerischen Mathematik.
- Schriftliche Ausarbeitung:
  - Mathematisch präzise Darstellung in eigenen Worten.
  - 15 – 20 Seiten (LaTex).
- Beamerpräsentation: etwa 45 Minuten mit anschließender Diskussion.

Aufbauende Masterarbeit möglich.

Vorlesung “Numerik partieller Differentialgleichungen II” im SoSe 2012.

Veranstaltungsmodus und -termin nach Vereinbarung.

Für Parameter $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{D}$, berechne

$$s^e(\boldsymbol{\mu}) := \ell(u^e(\boldsymbol{\mu})).$$

Hier ist $u^e(\boldsymbol{\mu})$ die *exakte* Lösung von

$$a(u^e(\boldsymbol{\mu}), v; \boldsymbol{\mu}) = f(v), \quad \forall v \in X^e.$$

Ansatz: Wähle $X^{\mathcal{N}} \subset X^e$ und löse

$$a(u^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}), v; \boldsymbol{\mu}) = f(v), \quad \forall v \in X^{\mathcal{N}}.$$

- Schnelle / häufige Auswertung $s^e(\boldsymbol{\mu})$ für verschiedene $\boldsymbol{\mu}$ nötig.
- Aufwand: $\mathcal{O}(\mathcal{N})$ pro Parameter, wobei $\mathcal{N}$ i.d.R. "groß".
- Lösungen $u^{\mathcal{N}}$ glatt im Parameter.

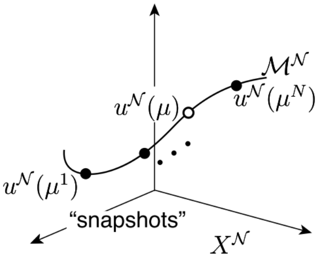
Idee: Berechne nur eine gewisse Anzahl *Snapshots* für $N \ll \mathcal{N}$

$$X_N = \text{span}\{u^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}^1), \ldots, u^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}^N)\}.$$

und berechne $s^e(\boldsymbol{\mu}) \approx \ell(u_N(\boldsymbol{\mu}))$ mit

$$a(u_N(\boldsymbol{\mu}), v; \boldsymbol{\mu}) = f(v), \quad \forall v \in X_N.$$

Aufwand: $\mathcal{O}(N^3)$ pro Parameter, wobei $N^3 \ll \mathcal{N}$.



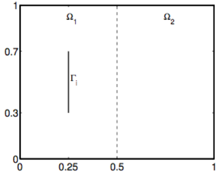
G. Rozza, D.B.P. Hyunh, A.T. Patera. *Reduced Basis Approximation and Posteriori Error Estimation for Affinely Parametrized Elliptic Coercive Partial Differential Equations.*

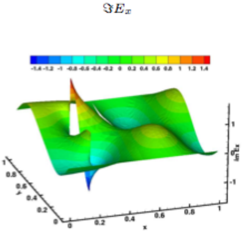
1) Reduzierte Basis Methoden für Maxwell-Gleichungen

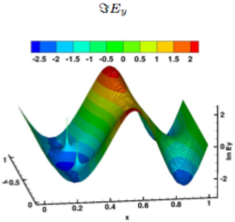
- Y. Chen, J.S. Hesthaven, Y. Maday, J. Rodriguez. *Certified reduced basis methods and output bounds for the harmonic Maxwell's equations*. SIAM Journal on Scientific Computing 32(2):970–996, 2010.
- Anwendung der Reduzierten Basis Methode auf die harmonische Maxwell-Gleichung (hier für das elektrische Feld)

$$(\alpha^{-1}\nabla \times \mathbf{E}, \nabla \times \mathbf{v})_\Omega - \omega^2(\varepsilon\mathbf{E}, \mathbf{v})_\Omega = f(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in X^e.$$

- Weitere Schlagworte: discontinuous Galerkin method, duales Problem.

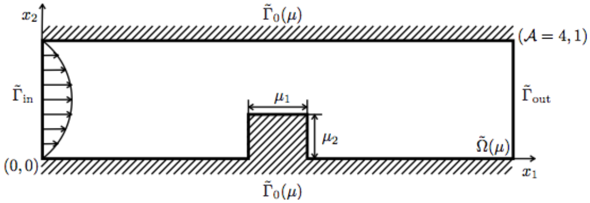






2) Reduzierte Basis Methoden für das Stokes Problem

- A.-L. Gerner, K. Veroy. *Reduced basis a posteriori error bounds for the Stokes equations in parametrized domains: a penalty approach*. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 21:2103–2134, 2011.
- Anwendung des RB-Frameworks für ein parametrisiertes Gebiet auf die Stokes-Gleichungen: $-\nabla^2 \mathbf{u}(\mu) + \nabla p(\mu) = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{u}(\mu) = 0$.
- Weitere Schlagworte: Parametrisierte Gebiete.

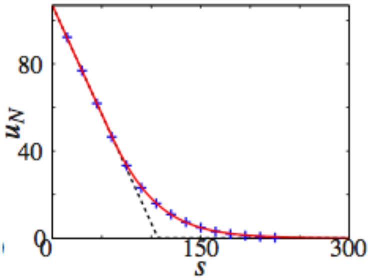


3) Bewertung amerikanischer Optionen über Reduzierte Basis Methoden

- B. Haasdonk, J. Salomon, B. Wohlmuth. *A reduced basis method for the evaluation of American options*. Preprint, 2011.
- Anwendung der Reduzierten Basis Methode auf ein freies Randwertproblem aus der Finanzmathematik: Berechne $u = u(t, S)$ sodass

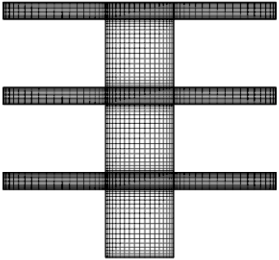
$$\begin{gathered}\partial_t u - \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_{SS}^2 u - (r-\mu) S \partial_S u + r u(t,S) \geq 0, \quad u \geq g, \\ \big(\partial_t u - \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_{SS}^2 u - (r-\mu) S \partial_S u + r u(t,S)\big) \cdot (u - g) = 0\end{gathered}$$

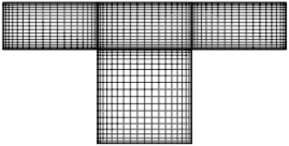
- Weitere Schlagworte: Hindernisproblem, Black-Scholes Modell.



4) Die Reduzierte Basis Elemente Methode (RBEM)

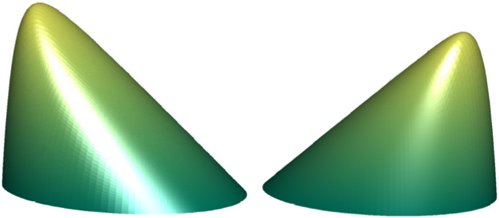
- Y. Maday, E.M. Ronquist. *The reduced basis element method: application to a thermal fin problem*. SIAM Journal on Scientific Computing 26(1):240–258, 2004.
- Zerlegung des zugrundeliegenden Gebietes in Teilgebiete, späteres “Zusammenkleben” der Reduzierten Basis Lösungen auf den Teilgebieten.

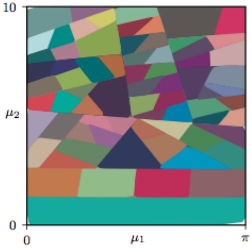




5) hp – Reduzierte Basis Methoden

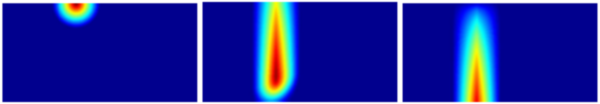
- J. Eftang, A.T. Patera, E. Ronquist, *An hp – certified reduced basis method for parametrized elliptic partial differential equations*. SIAM Journal on Scientific Computing 32(6):3170–3200, 2010
- Adaptive Aufteilung des Parameterraums $\mathcal{D}$ in Teilräume $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_\ell$ und Berechnung einer Reduzierten Basis für jeden Parameterteilraum $\mathcal{V}_i$.
- Anwendung auf Probleme, wo die Lösung stark von Position des Parameters μ im Parameter $\mathcal{D}$ abhängt.





6) Reduzierte Basis Methoden für Evolutionsgleichungen mit adaptiver Zeitintervallszerlegung

- M. Dihlmann, M. Drohmann, B. Haasdonk. *Model reduction of parametrized evolution problems using the reduced basis method with adaptive time partitioning*. Preprint, 2011.
- Basis-Generierung für parabolische Probleme verlangt (in Vergleich zum stationären) Fall, weitere spezielle Techniken.
- (Adaptive) Unterteilung des Zeitintervalls in Teilintervalle und Generierung einer Reduzierten Basis für jedes Teilintervall.

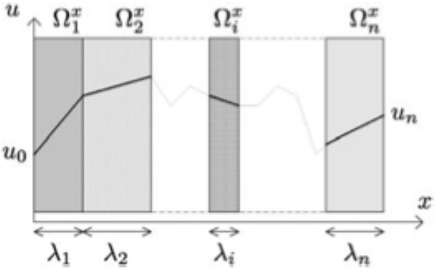


7) Proper General Decomposition Method

- A. Leygue, E. Verron, *A first step towards the use of proper general decomposition method for structural optimization*. Archives of Computational Methods in Engineering 17:465–472, 2010.
- Idee: Berechne approximativ die Lösung einer parametrisierten PDE sodass

$$u(x_1,\dots,x_n,\mu_1,\dots,\mu_m)=\sum_{i=1}^{N}F^i(x_1)\cdots F^i(x_n)\cdot F^i(\mu_1)\cdots F^i(\mu_m).$$

- Abgrenzung zur Reduzierten Basis Methode erforderlich.
- Beispiel: $\frac{\partial}{\partial x}\left(D(x)\frac{\partial}{\partial x}u(x,\lambda_1,\dots,\lambda_n)\right)=f(x)$ für $x\in\Omega=\cup_{i=1}^n\Omega_i^x$.



8) Multi-Component Empirical Interpolation Method (MCEIM)

- T. Tonn. *Reduced Basis Method (RBM) for non-affine elliptic parametrized PDEs*. Dissertation, Universität Ulm, 2011.
- Affinität der zugrundeliegenden Gleichung(en) wird oft vorausgesetzt

$$a(u, v; \mu) = \sum_{i=1}^{Q} \theta(\mu) a^q(u, v).$$

- Wenn diese Annahme nicht erfüllt ist:

$$a(u, v; \mu) = \int_\Omega \Big[\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1(\cdot, \mu) & \alpha_2(\cdot, \mu) \\ \alpha_3(\cdot, \mu) & \alpha_4(\cdot, \mu) \end{pmatrix}}_{=:A(\cdot,\mu)} \nabla u \Big] \cdot \nabla v.$$

- Approximiere $A(x; \mu)$ durch $A^\varepsilon = \sum_{i=1}^{M} \vartheta(\mu) Q^i(x)$ sodass $\|A(\cdot, \mu) - A^\varepsilon(\cdot, \mu)\|_{L_\infty} \leq \varepsilon$.
- Erweiterung der sog. EIM für skalarwertige Funktionen.