

Übungsblatt 1

(Abgabe Fr. 26.04. 2013 um 10 Uhr **vor** der Übung.)

Aufgabe 1 (*Einführung in MATLAB*)

(0 Punkte)

Machen Sie sich mit MATLAB vertraut. Eine Einführung finden Sie auf der Homepage.

Aufgabe 2 (*Cramer'sche Regel*)

(6 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden linearen Gleichungssysteme

$$Ax = b$$

eindeutig lösbar sind und berechnen Sie gegebenenfalls die Lösung. Verwenden Sie hierzu die Cramer'sche Regel mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -4 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 12 & 16 \\ 2 & 11 & 17 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Lösung

(a) Zur Lösbarkeit des Gleichungssystems betrachten wir die Determinante von A . Da

$$\det A = 2 \cdot 14 - (-7) \cdot (-4) = 0$$

ist das Gleichungssystem nicht lösbar.

(b) Für die Determinante von A gilt mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 11 & 17 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 2 & 17 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} \\ &= 28 - 8 - 4 = 16 \neq 0. \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat also eine eindeutige Lösung. Mit der Cramerschen Regel gilt

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 16 & 12 & 16 \\ 8 & 11 & 17 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \left(4 \det \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 11 & 17 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 8 & 17 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{16} (112 - 576 + 160) = -19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 16 & 16 \\ 2 & 8 & 17 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \left(\det \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 8 & 17 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 2 & 17 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{16} (144 - 8 - 32) = 6.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3 &= \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 12 & 16 \\ 2 & 11 & 8 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{16} \left(\det \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 11 & 8 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} + 4 \det \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{16} (-80 + 64 - 8) = -1.5
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Gauß'sches Eliminationsverfahren)

(4 Punkte)

Geben Sie die LR -Zerlegung der Matrix A an und lösen sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Vorwärts- bzw. Rückwärts-Einsetzen.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 5 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -2 \\ 29 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Verwenden Sie bei der Rechnung ausschließlich Brüche und keine Dezimalen und geben Sie Zwischenschritte an.

Lösung

Laut skript ergibt sich

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{4}{17} & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & \frac{17}{2} & 17 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Löse $Ly = b$:

$$\Rightarrow y = (-2 \quad 34 \quad 4)^T$$

Löse $Rx = y$:

$$\Rightarrow x = (4 \quad 2 \quad 1)^T$$

Aufgabe 4 (Aufwand)

(4 Punkte)

Geben Sie die Anzahl der Gleitkomma-Operationen (FLOPs) für die folgenden Operationen an:

- (a) Matrix-Vektor-Multiplikation $A \cdot x$, mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einem Vektor $x \in \mathbb{R}^n$.
- (b) Matrix-Vektor-Multiplikation $A \cdot x$, mit einer Tridiagonalmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einem Vektor $x \in \mathbb{R}^n$

Lösung

- (a) Für $b := Ax$ gilt

$$b_j = \sum_{k=1}^n a_{j,k} x_k, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

also ergibt sich pro Eintrag ein Aufwand von n Multiplikationen und $n - 1$ Additionen, also $2n - 1$ FLOP's. Insgesamt haben wir n -Einträge, also gilt

$$\text{FLOPs}(Ax) = n(2n - 1) = \mathcal{O}(n^2).$$

- (b) In der ersten und letzten Zeile benötigt man 2 Multiplikationen und eine Addition, in den übrigen Zeile benötigt man 3 Multiplikationen und 2 Additionen. Also ergibt sich insgesamt

$$\text{FLOPs}(Ax, \text{tridiag}) = (n - 2) \cdot 5 + 6 = 5n - 4 = \mathcal{O}(n).$$

Aufgabe 5 (MATLAB)

(4+2 Punkte)

- (a) Vergleichen sie die Anzahl der FLOPs für die Cramer'sche Regel mit Leibnizformel, die Cramer'sche Regel mit Laplace'scher Entwicklungsformel und das Gauß'sches Eliminationsverfahren. Schreiben Sie hierzu ein Skript aufwand.m das die Anzahl der FLOPs in Abhängigkeit der Matrixgröße n in einem Schaubild darstellt. Verwenden Sie für den Plot eine doppelt-logarithmische Skala (loglog-Befehl in MATLAB) und fügen Sie eine Legende ein. Erklären Sie das Ergebnis.
- (b) Schreiben Sie ein Skript lgs.m, das die Lösung des linearen Gleichungssystems aus Aufgabe 3 berechnet.

Lösung

- (a) Das Schaubild zeigt, dass der Aufwand beim Gauß-Verfahren asymptotisch (für große n) linear mit Steigung 3 wächst. Wir haben hier also noch polynomialen Aufwand $\mathcal{O}(n^3)$. Der Aufwand bei den anderen beiden Verfahren ist nicht mehr polynomial, da der Aufwand im doppelt-logarithmischen Schaubild keine Gerade darstellt.

Drucken sie den Code sowie das Schaubilder aus und geben Sie diese mit ab. Senden Sie außerdem alle Funktionen in einer Email an folgende Adresse

angewandtenumerik@gmail.com

Betreff: Blatt01, Name1 Vorname1, Name2 Vorname2