

Übungsblatt 2

(Abgabe Fr. 10.05. 2013 um 10 Uhr **vor** der Übung.)
Nächste Woche (3.5.2013) findet **keine** Übung statt!

Aufgabe 6 (Laudau-Symbolik)

(6 Punkte)

Es sei (a_n) eine reellwertige Folge. Dann definiert man

$$\mathcal{O}((a_n)) = \{(b_n) \text{ reellwertige Folge} : \exists C > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |b_n| \leq C \cdot |a_n|\}.$$

Man schreibt für $(b_n) \in \mathcal{O}((a_n))$ auch etwas salopp $b_n = \mathcal{O}(a_n)$. Zeigen Sie für reellwertige Folgen $(a_n), (b_n)$ folgende Eigenschaften:

- (a) $a_n = \mathcal{O}(a_n)$
- (b) $a_n = c \cdot \mathcal{O}(b_n), c \in \mathbb{R} \Rightarrow a_n = \mathcal{O}(b_n)$
- (c) $b_n = \mathcal{O}(a_n) \iff \mathcal{O}(b_n) \subset \mathcal{O}(a_n)$
- (d) $c_n = \mathcal{O}(b_n), b_n = \mathcal{O}(a_n) \Rightarrow c_n = \mathcal{O}(a_n)$
- (e) $a_n + b_n = \mathcal{O}(\max(|a_n|, |b_n|))$
- (f) Man gebe zwei Folgen $(a_n), (b_n)$ an, für die weder $\mathcal{O}(b_n) \subset \mathcal{O}(a_n)$ noch $\mathcal{O}(a_n) \subset \mathcal{O}(b_n)$ gilt.

Aufgabe 7 (LR-Zerlegung)

(4+6 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass für die Inverse L^{-1} der Matrix L aus $A = L \cdot R$ gilt:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\ell_{2,1} & 1 & \ddots & & \vdots \\ -\ell_{3,1} & -\ell_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ -\ell_{n,1} & \dots & & -\ell_{n-1,n} & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $\ell_{j,k}$ die Einträge der Matrix L bezeichnen.

- (b) Gegeben sei die Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Leiten Sie für den Fall, dass die LR-Zerlegung

$$A = LR, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ d_1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & d_{n-1} & 1 & \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & & & \\ & e_2 & f_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & e_{n-1} & f_{n-1} \\ & & & & e_n \end{pmatrix},$$

existiert, Rekursionsformeln für d_j, e_j und f_j her. Welchen Aufwand hat die Berechnung der LR-Zerlegung mittels dieser Rekursion?

Aufgabe 8 (Schachbrett-Matrix)

(3+3 Punkte)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (n gerade), die ein Schachbrett-Muster aufweist:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & a_{1,3} & 0 & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & a_{2,4} & \cdots & 0 & a_{2,n} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} & 0 & \cdots & a_{3,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & 0 & a_{n-1,3} & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & a_{n,2} & 0 & a_{n,4} & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Um beim Lösen des Gleichungssystems $Ax = b$ sowohl Speicher als auch Rechenaufwand zu sparen, kann wie folgt verfahren werden:

1. Spalte die Matrix auf in zwei Teilmatrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{4,2} & a_{4,4} & \cdots & a_{4,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,2} & a_{n,4} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

2. Löse die Gleichungssysteme

$$A_1(x_1, x_3, \dots, x_{n-1})^T = (b_1, b_3, \dots, b_{n-1})^T, \quad A_2(x_2, x_4, \dots, x_n)^T = (b_2, b_4, \dots, b_n)^T.$$

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

- (a) Berechnen Sie den Rechenaufwand für obige Methode zur Lösung eines Gleichungssystems mit Schachbrett-Matrix und vergleichen Sie ihn mit dem Aufwand zum Lösen des vollen Systems mit einer einfachen LR Zerlegung und Vorwärts-Rückwärtseinsetzen für $n = 2, 4, 6, 20$. Um welchen Faktor ist die angepasste Methode asymptotisch schneller als die Standard-LR Zerlegung mit Vorwärts-Rückwärtseinsetzen?
- (b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = (1 \ 2 \ 3 \ 1)^T.$$

mit dem oben beschriebenen Algorithmus.

Aufgabe 9 (MATLAB)

(4+4+2 Punkte)

- (a) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `LR = lr(A)` zur Berechnung der LR -Zerlegung von A . Schreiben sie die Funktion so, dass **kein** zusätzlicher Speicherplatz benötigt wird und nur eine Matrix zurückgegeben wird, in der die Matrix R und L gemeinsam gespeichert sind. Ist die LR -Zerlegung ohne Pivotsuche nicht möglich, soll das Programm eine Fehlermeldung ausgeben.
- (b) Schreiben Sie eine Funktion `x = solve(LR,b)`, die die Matrix aus Aufgabenteil (a) übergeben bekommt und dann mittels Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen das Gleichungssystem $Ax = b$ löst.
- (c) Schreiben Sie ein Skript `main.m`, das ein beliebiges (nichtriviales) Gleichungssystem der Größe 5 löst und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis des MATLAB `\`-Operators.

Drucken sie den Code sowie das Schaubilder aus und geben Sie diese mit ab. Senden Sie außerdem alle Funktionen in einer Email an folgende Adresse

angewandtenumerik@gmail.com
Betreff: Blatt01, Name1 Vorname1, Name2 Vorname2