

Übungsblatt 3

(Abgabe Fr. 17.05. 2013 um 10 Uhr **vor** der Übung.)

Aufgabe 10 (*Diagonaldominanz*)

(4 Punkte)

Zeigen Sie: Ist eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ strikt diagonal dominant, so ist sie auch invertierbar.

Lösung

Sei $A = (a_1, \dots, a_n)$ wobei a_i die Spalten von A sind mit

$$a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen, dass $a_1, \dots, a_n$ linearunabhängig sind. Sei dafür $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 a_1 \dots \lambda_n a_n = 0 \quad (1)$$

Wähle $m \in \{1, \dots, n\}$ so, dass gilt:

$$|\lambda_m| \geq |\lambda_k| \quad \forall k = 1, \dots, n$$

Daraus folgt

$$\lambda_m a_{mm} + \sum_{k \neq m} \lambda_k a_{mk} = 0 \quad (\text{m-te Zeile von (1)})$$

Annahme: Sei $\lambda_m \neq 0$ daraus folgt:

$$|\lambda_m| |a_{mm}| = \left| \sum_{k \neq m} \lambda_k a_{mk} \right| \leq \sum_{k \neq m} |\lambda_k| |a_{mk}| \leq |\lambda_m| \sum_{k \neq m} |a_{mk}| < |\lambda_m| |a_{mm}|$$

Dies ist ein Widerspruch. Daraus folgt, dass $\lambda_m = 0$ und damit ist

$$\lambda_k = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$$

Somit sind die Spalten $a_1, \dots, a_n$ von A linearunabhängig.

Aufgabe 11 (*Cholesky-Zerlegung*)

(3+3 Punkte)

Bestimmen sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = (4, 12, 8)^T.$$

und lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen.

Lösung: Es gilt

$$k = 1 : \quad l_{11} = (a_{11})^{1/2} = 1$$

$$i = 2 : \quad l_{21} = \frac{1}{l_{11}} a_{21} = 2$$

$$l_{31} = \frac{1}{l_{11}} a_{31} = 1$$

$$k = 2 : \quad l_{22} = (a_{22} - l_{21}^2)^{1/2} = (8 - 4)^{1/2} = 2$$

$$i = 3 : \quad l_{32} = \frac{1}{l_{22}} (a_{32} - l_{31} l_{21}) = \frac{1}{2} (2 - 1 \cdot 2) = 0$$

$$k = 3 : \quad l_{33} = (a_{33} - ((l_{31})^2 + (l_{32})^2))^{1/2} = (2 - 1 - 0)^{1/2} = 1$$

Damit ergibt sich

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Vorwärtseinsetzen erhalten wir für $Ly = b$ die Lösung $y = (4, 2, 4)^T$. Durch Vorwärtseinsetzen erhalten wir analog $x = (-2, 1, 4)^T$.

Aufgabe 12 (QR-Zerlegung)

(4+4 Punkte)

- (a) Gegeben sei eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass die QR-Zerlegung $A = QR$ unter der Normierungsbedingung $r_{ii} > 0, i = 1, \dots, n$ eindeutig bestimmt ist.
- (b) Gegeben sei die QR-Zerlegung der Matrix $A \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ durch

$$Q = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & -1 & -5 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -3 & -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und der Vektor $b = (1, 2, 1, 1)^T$. Lösen Sie mit der QR-Zerlegung das Minimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|,$$

sodass der Lösungsvektor x die minimale Norm besitzt (dadurch ist der Vektor x eindeutig bestimmt). Geben Sie zusätzlich die Norm des Residuums an.

Lösung:

- (a) Wir nehmen an, es gebe zwei QR-Zerlegungen: $A = Q_1 R_1$ und $A = Q_2 R_2$ mit $r_{ii}^{(j)} > 0, i = 1, \dots, n, j = 1, 2$. Da A quadratisch ist und $r_{ii} > 0$ gilt, sind R_1 und R_2 invertierbare obere Dreiecksmatrizen. Es gilt

$$\begin{aligned} A &= Q_1 R_1 = Q_2 R_2 \\ Q_1 &= Q_2 R_2 R_1^{-1} \\ Q_2^T Q_1 &= R_2 R_1^{-1} \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} Q &:= Q_2^T Q_1 = R_2 R_1^{-1} \quad \text{rechte obere Dreiecksmatrix} \\ Q^T &= Q_1^T Q_2 = R_1 R_2^{-1} \quad \text{rechte obere Dreiecksmatrix} \end{aligned}$$

Wegen

$$Q^T Q = R_1 R_2^{-1} R_2 R_1^{-1} = I$$

ist Q orthogonal und diagonal mit $|\lambda_i| = 1$ auf der Diagonalen. Aus $Q R_1 = R_2$ folgt $\lambda_i r_{ii}^{(1)} = r_{ii}^{(2)} > 0$ (nach Voraussetzung). Somit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ und $\lambda_i = 1$. Also ist $Q = I$, d.h.

$$R_1 = R_2, \quad Q_1 = A R_1^{-1} = A R_2^{-1} = Q_2$$

Somit ist die QR-Zerlegung mit der Normierungsbedingung eindeutig.

- (b) Es gilt

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\| = \min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Q^T Ax - Q^T b\| = \min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Rx - Q^T b\|,$$

wobei $Q^T b = (-5/2, 1/6, -1/6, -5/6)^T$. Damit ergibt sich durch Rückwärtseinsetzen $x_2 = -1/18, x_1 = 25/18$. Die Norm des Residuums $Ax - b$ erhalten wir durch

$$\|Ax - b\| = \|(-1/6, -5/6)^T\| = 781/918.$$

- (a) Schreiben Sie eine Funktion `L=cholesky(A)`, die die Cholesky-Zerlegung der Matrix A berechnet. Die Funktion soll zu Beginn prüfen, ob die Matrix A symmetrisch ist und die notwendigen Kriterien aus Satz 3.6.3 ii) und iii) für die positive Definitheit erfüllt sind. Falls diese nicht erfüllt sind soll das Programm eine Fehlermeldung ausgeben und abbrechen.

Da die oben genannten Kriterien nicht hinreichend für die positive Definitheit der Matrix A sind, kann es immer noch sein, dass die Cholesky-Zerlegung nicht existiert. Das Verfahren soll abbrechen, sobald fest steht, dass A nicht positiv definit ist.

- (b) Schreiben Sie ein Skript `main.m` das die Cholesky-Zerlegung von

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

berechnet und erklären sie das Ergebnis.

Drucken sie den Code sowie das Schaubilder aus und geben Sie diese mit ab. Senden Sie außerdem alle Funktionen in einer Email an folgende Adresse

angewandtenumerik@gmail.com

Betreff: Blatt03, Name1 Vorname1, Name2 Vorname2