

Übungsblatt 4

(Abgabe Fr. 24.05. 2013 um 10 Uhr **vor** der Übung.)

Aufgabe 14 (Drehen)

(10 Punkte)

- (a) Im $\mathbb{R}^2$ kann ein Vektor durch Multiplikation mit der Drehmatrix

$$D_{12} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

in der x_1 - x_2 Ebene um den Winkel φ gedreht werden. Geben Sie eine Drehmatrix D_{ij} an, mit der ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ in der x_i - x_j Ebene ($i, j \in \{1, \dots, n\}$) um den Winkel φ gedreht werden kann.

- (b) Wie muss die Drehmatrix D aussehen, die einen Vektor $v = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ auf den Vektor $\tilde{v} = (r, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$ dreht? Betrachten Sie dazu erst den zweidimensionalen Fall und drücken Sie $\cos(\varphi)$ und $\sin(\varphi)$ in Abhängigkeit der Koordinaten von $v = (a, b)$ aus. Betten Sie dann die zweidimensionale Drehmatrix in den $\mathbb{R}^n$ ein.

- (c) Transformieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \text{ mit Hilfe sukzessiver Drehungen der Spalten von } A \text{ auf die Matrix } \tilde{A} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie dabei alle verwendeten Drehmatrizen an.

Lösung

- (a)

$$D_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & c & & & -s & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & s & & & & c & \\ & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Hier stehen $c := \cos(\varphi)$ und $s := \sin(\varphi)$ in der i -ten und j -ten Zeile bzw. Spalte.

- (b) Im $\mathbb{R}^2$ soll gelten

$$D = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine kurze Rechnung (siehe Vorlesung) ergibt

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad c = \frac{|a|}{r}; \quad s = -\frac{\text{sign}(a) \cdot b}{r}.$$

Analog zu Teil (a) ist die Matrix für den $\mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$D_{i,1} = \begin{pmatrix} c & & & & -s \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ s & & & c & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir drehen zuerst die erste Spalte so dass a_{21} Null wird. Also ist

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2} = 5 \\ c &= \frac{a_{11}}{r} = \frac{4}{5} \\ s &= -\frac{a_{21}}{r} = -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

Er gilt also

$$D_{21}A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} =: A_1.$$

Die Drehung von a_{31} auf Null erfolgt durch

$$D_{31}A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -2 \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =: A_2.$$

Schließlich drehen wir noch a_{32} auf Null durch

$$D_{32}A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{8}{17}} & \sqrt{\frac{9}{17}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{9}{17}} & \sqrt{\frac{8}{17}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -2 \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{34}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: A_3.$$

Aufgabe 15 (MATLAB)

(2+6+4+2 Punkte)

Wir betrachten nun die QR -Zerlegung mit Givens-Rotationen. Es ist nicht immer notwendig (aus Speicher- und Effizienz-Gründen) die Matrix Q explizit auszurechnen. Wenn man die Reihenfolge kennt, in der die Null-Einträge erzeugt werden, genügt es anstelle der 0 den Wert $\sin(\phi)$ (ϕ ist der Drehwinkel) zu speichern. Man speichert also Q implizit, ohne zusätzlichen Speicherplatz zu verbrauchen.

- Implementieren Sie eine Funktion `val=sinPhi(a,b)`, die $\sin(\phi)$ berechnet, sodass der Vektor $(a,b)^T$ auf die x_1 -Achse gedreht wird.
- Implementieren sie eine Funktion `A=qrGivens(A)`, die die 0-Einträge spaltenweise von oben nach unten erzeugt und den entsprechenden Sinus-Wert in der Matrix A speichert.
- Implementieren Sie eine Funktion `b=matVecQt(A,b)`, die die Matrix aus der `qrGivens`-Funktion und einen Vektor b erhält und das Produkt $Q^T b$ berechnet.
- Schreiben Sie ein Skript `main.m`, das zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

die QR -Zerlegung berechnet. Lösen sie anschließend das Problem $\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|$ für den Vektor $b = (1, 2, 1, 1)^T$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Aufgabe 12 b).

Drucken sie den Code sowie das Schaubilder aus und geben Sie diese mit ab. Senden Sie außerdem alle Funktionen in einer Email an folgende Adresse

angewandtenumerik@gmail.com

Betreff: Blatt04, Name1 Vorname1, Name2 Vorname2