

Übungsblatt 5

(Abgabe Fr. 31.05. 2013 um 10 Uhr **vor** der Übung.)

Aufgabe 16 (Householder-Spiegelung)

(10 Punkte)

Sei $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann heißt die Matrix

$$P := I - 2 \frac{ww^T}{w^T w}$$

Householder-Matrix und w der zugehörige Householder-Vektor.

1. Zeigen Sie: P ist symmetrisch und orthogonal.
2. Konstruieren Sie zu dem Vektor

$$x = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}^T$$

die Householder-Matrix P , sodass x auf die x_1 -Achse gespiegelt wird. Stellen Sie die Vektoren x , w und Px graphisch dar und erklären Sie die Bedeutung des Vektors w . Wie kann dies auf den $\mathbb{R}^3$ übertragen werden?

3. Berechnen Sie die QR -Zerlegung mit Householder-Spiegelungen der Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie dabei alle Transformations-Matrizen $P^{(i)}$ sowie die Matrix Q und R explizit an.

Lösung

1. Symmetrie:

$$P^T = I^T - 2 \left(\frac{ww^T}{w^T w} \right)^T = I - 2 \left(\frac{ww^T}{w^T w} \right) = P$$

Orthogonalität:

$$\begin{aligned} PP^T &= P^2 = \left(I - 2 \frac{ww^T}{w^T w} \right)^2 = I - 4 \frac{ww^T}{w^T w} + 4 \frac{ww^T ww^T}{(w^T w)^2} \\ &= I - 4 \frac{ww^T}{w^T w} + 4 \frac{(w^T w) ww^T}{(w^T w)^2} = I - 4 \frac{ww^T}{w^T w} + 4 \frac{ww^T}{w^T w} = I. \end{aligned}$$

2. Für den Vektor $x = (4, 3)^T$ gilt:

$$w_1 = -1 \Rightarrow w = (-1, 3)^T, w^T w = 10, ww^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

und somit

$$P = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad Px = (5, 0)^T.$$

(Zeichnung siehe Übung.) Geometrisch kann der Vektor w als Normalen-Vektor der Spiegelebene interpretiert werden, genauer gesagt ist die Spiegelebene die Ebene, die durch den Ursprung verläuft und senkrecht auf w steht.

3. Im ersten Schritt spiegeln wir die erste Spalte von A . Dazu sei $x = (1, 1, 1, 1)^T$, also $w_1 = \frac{-3}{3} = -1$ und somit $w = (-1, 1, 1, 1)^T$. Dadurch ergibt sich für die Householder-Matrix

$$P^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten

$$A^{(1)} := P^{(1)} A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Im zweiten Schritt spiegeln wir die 2. Spalte von A . Dazu sei $x = (-2, -2, 1)^T$, also $w_1 = -2 - 3 = -5$ und somit $w = (-5, -2, 1)^T$. Dadurch ergibt sich für die Householder-Matrix

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

und wir erhalten

$$A^{(2)} := P^{(2)} A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 17 (MATLAB)

(10 Punkte)

Laut Skript (Aufgabe 5.5.4) benötigt die QR -Zerlegung mit Householder-Transformationen ungefähr den halben Aufwand verglichen mit der QR -Zerlegung mit Givens-Rotationen, genauer gesagt gilt für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\text{FLOPS}(QR\text{-Givens}) = \frac{4}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

und

$$\text{FLOPS}(QR\text{-Householder}) = \frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2).$$

Dies wollen wir numerisch überprüfen.

1. Laden Sie sich dazu die Funktionen `householderVector.m` und `Householder.m` von der Homepage herunter und verstehen Sie den Code!
2. Schreiben Sie ein Skript `main.m`, in dem Sie sich für $n = 2^0, \dots, 2^{10}$ eine quadratische Matrix mit Zufallszahlen anlegen (`rand`). Berechnen Sie anschließend für jede dieser Matrizen die QR -Zerlegung mit Givens-Rotationen und Householder-Spiegelungen. Messen die dabei jeweils die Zeit (`tic`, `toc`).
3. Plotten Sie die Zeiten in Abhängigkeit von n in doppelt-logarithmischer Skala.
4. Erklären Sie das Ergebnis.

Lösung

Das Schaubild zeigt, dass beide Verfahren dasselbe asymptotische Verhalten haben (beide Zeitkurven sind Geraden der Steigung 3). Wir sehen außerdem, dass das Householder-Verfahren weniger Zeit benötigt als die Givens-Rotationen, da die Konstant beim Aufwand ca. halb so groß ist.

Der Bereich am Anfang ist der vor-asymptotische Bereich, der aufgrund von Zeitmessungsfehlern oder Prozesse, die im Hintergrund laufen und die Zeitmessung beeinflussen, nicht aussagekräftig ist.

Drucken sie den Code sowie das Schaubilder aus und geben Sie diese mit ab. Senden Sie außerdem alle Funktionen in einer Email an folgende Adresse

angewandtenumerik@gmail.com
Betreff: Blatt05, Name1 Vorname1, Name2 Vorname2