

Wima Praktikum 1

Praktikumsblatt 2

1. Logische Matrizen

(a) Gegeben seien folgende MATLAB Befehle:

```
a = 1:3:13;  
b1 = a < 9;  
b2 = [ones(1,3), zeros(1,2)];  
a(b1)  
a(b2)
```

- Welches Ergebnis liefern die einzelnen Zeilen?
- Warum produziert `a(b2)` in diesem Fall einen Fehler, und wie kann man diesen beheben?

(b) Gegeben sei

```
x = [1.2, 2.2, 2.3, 1.7, inf, NaN, 1.5, 2.3, 4.1, inf]
```

Bestimmen Sie einen logischen Vektor `v`, der

- für jeden endlichen Eintrag in `x` eine 1 und für alle nicht endlichen Elemente eine 0 enthält.
- für jeden Eintrag in `x`, dessen Abstand zu der Zahl 2 größer ist als 0.4, eine 1 und für die restlichen Einträge eine 0 enthält.

(c) Bestimmen Sie für die endlichen Einträge aus `x` den Mittelwert, die Standardabweichung und die Varianz.

Geben Sie mit einem einzigen Befehl alle Elemente an, deren Abstand vom Mittelwert kleiner ist als die Standardabweichung.

(d) Gegeben sei die Matrix

```
A = round(rand(5,5)*1000);
```

Ordnen Sie die Einträge von `A` der Größe nach, beginnend mit dem kleinsten Element. Verwenden Sie die MATLAB-Befehle `ismember` und `reshape`.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(e) Gegeben sei die Matrix

```
B = magic(6);
```

Bestimmen Sie die logische Matrix `C`, die für alle gerade Einträge in `B` eine 1 und für alle ungeraden Einträge eine 0 enthält.

Speichern Sie alle geraden Einträge aus `B` und deren Indizes in den Vektoren `c1` und `c2`.

Hinweis: Machen Sie sich mit dem Befehl `find` vertraut.

2. Schleifen und Anweisungen

Schreiben Sie ein Skript, welches alle echten Teiler einer beliebigen Menge natürlicher Zahlen bestimmt und die Anzahl der Teiler graphisch als Balkendiagramm darstellt.

- (a) Bestimmen Sie für alle natürlichen Zahlen von 1 bis 100 die Anzahl der echten Teiler und speichern Sie diese in einem Vektor **b**.

Legen Sie zusätzlich einen Vektor **c** an, in dem Sie alle Zahlen speichern, die mehr als 10 Teiler haben.

- (b) Stellen Sie die Anzahl der Teiler graphisch in einem Balkendiagramm dar.
- (c) Schreiben Sie ein Skript, welches alle Primzahlen der ersten 100 natürlichen Zahlen ausgibt (Lösung nur mit **for**-Schleife und **switch**-Anweisung).
- (d) Verallgemeinern Sie das Skript, sodass die Menge der natürlichen Zahlen in (a) - (c) bei Skript-Ausführung beliebig variiert werden kann.

3. Schleifen, Anweisungen und Performance

Sie gehen ins Casino und spielen Roulette (Zahlen(0 - 36)), dazu haben Sie sich das folgende System überlegt: Sie setzen 2€ am Anfang auf Gerade (2,4,6,...) oder Ungerade (1,3,5,...). Wenn Sie falsch getippt haben, ist Ihr Einsatz verloren, dann verdoppeln Sie im folgenden Spiel Ihren Einsatz. Wenn Sie richtig getippt haben, gewinnen Sie das Doppelte Ihres Einsatzes und Sie setzen im folgenden Spiel wieder 2€.

- (a) Der Einfachheit halber nehmen wir an Sie tippen immer auf Gerade. Schreiben Sie ein Skript, das dieses Spiel bis zum ersten Gewinn simuliert. Wie viele Spiele benötigen Sie bis zum ersten Gewinn? Wie hoch ist Ihr Gesamtgewinn? Wie hoch ist Ihr gesamter Einsatz?

Hinweis: Benutzen Sie den MATLAB-Befehl `randi(37,1)-1` um natürliche Zufallszahlen im Bereich (0-36) zu erzeugen.

- (b) Simulieren Sie n Spiele und berechnen Sie den Gewinn/Verlust (mithilfe einer **for**-Schleife). Entspricht der Gewinn Ihren Erwartungen? Wie hoch war Ihr maximaler Einsatz?
- (c) Nehmen Sie nun an, Sie haben ein Einsatzlimit von 32€ an dem Tisch (verlieren Sie also bei einem Einsatz von 32€, so gibt es 2 Möglichkeiten: Sie bleiben bei einem Einsatz von 32€ bis Sie gewinnen, oder Sie beginnen von vorne mit einem Einsatz von 2€). Wie wirkt sich dieses Limit auf Ihren Gewinn aus?

- (d) Verbessern Sie die Performance von Teil (b) (durch Vermeiden von Schleifen).

Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe (a).

- (e) Verbessern Sie nun auch die Performance von Teil (c) (für den Fall, dass wir nach einem Einsatz von 32€ wieder von vorne beginnen).

Hinweis: Verwenden Sie für alle Teilaufgaben die MATLAB-Befehle `tic` und `toc` um die Ausführungszeit zu bestimmen.

4. Rechnen mit Polynomen

MATLAB stellt mehrere Anweisungen zum Rechnen mit Polynomen zur Verfügung. Polynome werden dabei als (Zeilen-)Vektoren ihrer Koeffizienten, nach fallenden Potenzen geordnet, dargestellt. Dem Polynom $x^3 - 6x + 4$ entspricht also der Vektor $[1, 0, -6, 4]$.

Es sei

$$f : x \rightarrow -x^5 + 3x^3 - 8x - 3 \quad \text{und} \\ g : x \rightarrow x^3 + 2x^2 - 5x + 1.$$

(a) Berechnen Sie

- die Summe $f + g$,
- das Produkt fg ,
- den Quotienten und den Rest der Division f/g .

Hinweis: Nützliche MATLAB Befehle sind `polyval`, `conv` und `deconv`.

(b) Gegeben sei das Polynom

$$h : x \mapsto -x^5 + 16x^4 - 95x^3 + 260x^2 - 324x + 144.$$

- Bestimmen Sie die Nullstellen und Extremstellen des Polynoms.

Hinweis: Nützliche MATLAB Befehle sind `roots` und `polyder`.

- Stellen Sie h für x -Werte im Bereich der kleinsten und größten Nullstelle graphisch dar. Markieren Sie anschließend alle Nullstellen und Extremwerte.

Hinweis: Nützliche MATLAB Befehle sind `plot` (zum Markieren) und `polyval`.

Zusatzaufgaben

5. Matrizenpolynome, Satz von Cayley-Hamilton

Potenzen von (n, n) -Matrizen sind wieder (n, n) -Matrizen, ebenso alle Linearkombinationen von (n, n) -Matrizen. Wenn also in einem Polynom $p(x)$ für x eine (n, n) -Matrix eingesetzt wird, ist auch $p(x)$ eine (n, n) -Matrix.

Beispiel: Ist

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ und } p(x) = x^2 - 2x + 3,$$

so ist

$$p(M) = M^2 - 2M + 3I_2 = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}.$$

(a) Der Satz von Cayley-Hamilton sagt:

Ist M eine quadratische Matrix mit dem charakteristischen Polynom $c(x)$, so gilt:

$$c(M) = 0.$$

Erzeugen Sie eine $(6, 6)$ -Zufallsmatrix M , bestimmen Sie ihr charakteristisches Polynom, und verifizieren Sie den Satz von Cayley-Hamilton. (Um ein gegebenes Polynom mit einer Matrix als Argument auszuwerten benutze man den Befehl `polyvalm`. Wo ist der Unterschied zu `polyval`?).

(b) Wenn $c(x)$ das charakteristische Polynom einer (n, n) -Matrix M und $p(x)$ ein beliebiges Polynom ist, so lässt sich $p(x)$ durch $c(x)$ mit Rest dividieren, also in der Form

$$p(x) = q(x)c(x) + r(x)$$

darstellen. Für $x = M$ ausgewertet ergibt dies

$$p(M) = q(M)c(M) + r(M).$$

Weil nach dem Satz von Cayley-Hamilton das charakteristische Polynom $c(M)$ verschwindet, folgt

$$p(M) = r(M).$$

$r(x)$ heißt Ersatzpolynom von $p(x)$; sein Grad ist kleiner als n .

Bestimmen Sie für eine zufällig erzeugte $(6,6)$ -Matrix M die Potenz M^{10} auf zwei Arten:

- mit der Anweisung M^{10} und
- indem Sie das Ersatzpolynom von $p(x) = x^{10}$ an der Stelle M auswerten; beachten Sie, dass $r(x)$ einen Grad weniger als 6 hat.

6. Cell Arrays

Gegeben sei der folgende Cell Array

```
C = {'Hallo Welt', zeros(1,4), [], 3, magic(4), [2,3,4]};
```

Was sind die Werte der folgenden MATLAB Ausdrücke?

- (a) `C(2)`
- (b) `C(1,3)`
- (c) `C{5}(1,3)`
- (d) `C{2,1}{1}`
- (e) `C{:}`
- (f) `C{1}(1:5)`
- (g) `C{1,:}`
- (h) `{C{1,:}}`
- (i) `[a,b,c]=C{1,:}`