Prof. Dr. Dirk Lebiedz
M.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Sommersemester 2013

Nichtlineare Optimierung und optimale Steuerung - Übungsblatt 3

(Besprechung: Montag, 6. Mai 2013)

Aufgabe 8 *(Tangentialkegel)*
Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ und $\bar{x} \in S$ Zeigen Sie:

$T(S, \bar{x})$ ist ein abgeschlossener Kegel.

Aufgabe 9 *(Tangentialkegel und konische Hülle)*
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $\bar{x} \in K$. Zeigen Sie:

$$T(K, \bar{x}) = \overline{K(\bar{x})}.$$

Also, dass der Tangentialkegel der Abschluss der konischen Hülle von K in $\bar{x}$ ist.

Aufgabe 10 *(Variationsungleichung)*
Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ und $\bar{x} \in S$ eine Minimalstelle des Problems

$$\min \{ f(x) \ : \ x \in S \} .$$

Ferner sei f differenzierbar in $\bar{x}$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\nabla f(\bar{x})^T v \geq 0 \qquad \forall\, v \in T(S, \bar{x}).$$

Aufgabe 11 *(Konvexe Hülle von Extremalpunkten)*
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex. Zeigen Sie:

K ist der Abschluss der konvexen Hülle ihrer Extremalpunkte.

Hinweis: Induktion über die Raumdimension, Trennungssatz und benutzen Sie das folgende Lemma.

Lemma
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und H eine Hyperebene mit folgenden Eigenschaften

- $T := K \cap H \neq \emptyset$
- K ist komplett in einer der beiden abgeschlossenen, durch H bestimmten, Halbräumen enthalten.

Dann gilt:

Jeder Extremalpunkt von T ist auch Extremalpunkt von K.