Prof. Dr. Dirk Lebiedz
M.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Sommersemester 2013

Nichtlineare Optimierung und optimale Steuerung - Übungsblatt 4

(Besprechung: Montag, 13. Mai 2013)

Aufgabe 12 *(Linearisierende Kegel)*

Sei $S := \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, g(x) \in K\}$ mit $K \subset R^m$ konvex und $\bar{x} \in S$. Zeigen Sie:

$$K(g(\bar{x})) \text{ ist abgeschlossen} \qquad \Rightarrow \qquad T(S,\bar{x}) \subset L(S,\bar{x}).$$

Aufgabe 13 *(Regulärer Punkt)*

Sei $S = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, g(x) = 0\}$ und $\bar{x} \in S$ regulär im Sinne von Definition 3.9. Zeigen Sie:

$$g'(\bar{x})g'(\bar{x})^T \text{ ist regulär.}$$

Aufgabe 14 *(Slater-CQ)*

Sei $S := \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, g(x) \in K, \; h(x) = 0\}$, $\bar{x} \in S$ mit $K \subset \mathbb{R}^k$ konvex, $\mathring{K} \neq \emptyset$ und $g = (g_1, \dots, g_k)$ sowie $h = (g_{k+1}, \dots, g_m)$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} & 0 \in \operatorname{int}(\operatorname{Im}(g'(\bar{x})) + g(\bar{x}) - (K \times \{0\}_{m-k})) \\ \Leftrightarrow \quad & \operatorname{Im}(h'(\bar{x})) = \mathbb{R}^{m-k} \quad \text{d.h. } g_i'(\bar{x}), i = k+1, \dots, m \text{ sind linear unabhängig und es gibt } v \in \mathbb{R}^m \text{ mit} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad h'(\bar{x})v = 0 \text{ und } g(\bar{x}) + g'(\bar{x})v \in \mathring{K}. \end{aligned}$$

Aufgabe 15 *(Satz 3.17)*

Sei $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ein regulärer Punkt der zulässigen Menge $S = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, g(x) \in K, \; h(x) = 0\}$, $K \subset \mathbb{R}^k$ konvex mit $\mathring{K} \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

(i) Zu $v_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $h'(x)v_0 = 0$ und $g(\bar{x}) + g'(\bar{x})v_0 \in \mathring{K}$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Kurve

$$x : [0, \varepsilon] \to S \quad \text{ mit } x(0) = \bar{x} \quad \text{ und } \quad v_0 = \lim_{t \searrow 0} \frac{x(t) - \bar{x}}{t}.$$

(ii) $L(S,\bar{x}) \subset T(S,\bar{x})$.