Prof. Dr. Dirk Lebiedz
M.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Sommersemester 2013

Nichtlineare Optimierung und optimale Steuerung - Übungsblatt 10

(Besprechung: Montag, 01. Juli 2013)

Aufgabe 33 *(QP-Verfahren)*

Gegeben sei folgendes quadratisches Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcl} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & f(x) & := & \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx + \gamma \\ \text{s.t.} & Ax & \leq & \alpha \\ & Bx & = & \beta. \end{array}$$

mit einer symmetrisch positiv definiten Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ und $\beta \in \mathbb{R}^p$.

a) Implementieren Sie in `Matlab` ein QP-Verfahren unter Nutzung einer aktiven Mengen Strategie (ASS) zur Lösung obiger quadratischen Programme mit folgendem Funktionsaufruf

```
[x,lambda,mu,fx,nit] = qp(Q,c,gamma,A,alpha,B,beta,x,lambda,mu)
```

mit den Parametern

- `Q` - die s.p.d. Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- `c` - der Vektor $c \in \mathbb{R}^n$
- `gamma` - die Konstante $\gamma \in \mathbb{R}$ der Funktion f
- `A,alpha` - die Parameter der Ungleichungsbeschränkungen $Ax \leq \alpha$
- `B,beta` - die Parameter der Gleichungsbeschränkungen $Bx = \beta$
- `x,lambda,mu` - die Startwerte $(x_0, \lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$

Achten Sie darauf, dass dieses Verfahren sowohl **unbeschränkte, als auch gleichungs- und ungleichungsbeschränkte** quadratische Optimierungsprobleme lösen kann.

b) Laden Sie die Dateien `test_qp.m` und `output_test_qp.txt` von der Vorlesungshomepage herunter und testen Sie damit ihre Funktion.

c) Schreiben Sie ein Skript `test_qp2.m`, dass sowohl das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcl} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^2} & f_1(x) & := & (x_1-1)^2 + (x_2-2.5)^2 \\ \text{s.t.} & x_1 - 2x_2 + 2 & \geq & 0 \\ & -x_1 - 2x_2 + 6 & \geq & 0 \\ & -x_1 + 2x_2 + 2 & \geq & 0 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

als auch

$$\begin{array}{lrcl} \max\limits_{x\in\mathbb{R}^2} & f_2(x) & := & -x_1^2 - x_2^2 + 14x_1 + 6x_2 + 7 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 + 2x_2 & \leq & 3 \\ & x_2 & = & 0 \end{array}$$

löst.

Aufgabe 34 *(SQP-Verfahren)*

Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcl} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & f(x) & & \\ \text{s.t.} & h(x) & = & 0 \\ & g(x) & \leq & 0. \end{array}$$

mit einer beliebigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sowie m Ungleichungsbeschränkungen, d.h. $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und p Gleichungsbeschränkungen, also $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

a) Implementieren Sie in `Matlab` ein (lokales) SQP-Verfahren mit $H_k := \nabla^2 f(x_k)$ **ohne** Schrittweitensteuerung und **ohne** Nutzung einer Penalty-Funktion zur Lösung obiger Programme mit folgendem Funktionsaufruf

```
[x,lambda,mu,fx,nit] = sqp(f,gradf,hessf,g,jacobig,h,jacobih,x,lambda,mu)
```

mit den Parametern

- `f` - die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ als *function handle*
- `gradf` - der Gradient von f als *function handle*
- `hessf` - die Hessematrix von f als *function handle*
- `g` - die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ als *function handle*
- `gradg` - der Gradient von g als *function handle*
- `h` - die Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ als *function handle*
- `gradh` - der Gradient von h als *function handle*
- `x,lambda,mu` - die Startwerte $(x_0, \lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$

b) Schreiben Sie ein Skript `test_sqp.m`, dass das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcl} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^2} & f(x) & := & (x_1-\sqrt{2})^2 + (x_2-\sqrt{2})^2 + 5 \\ \text{s.t.} & x_1^2 + x_2^2 & \geq & 1 \\ & \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 & \leq & 9 \end{array}$$

mittels `sqp`-Funktion löst und verwenden Sie den folgenden Startwert $x_0 = (0.1, 2.5)^T$ und $\mu = (1,1)^T$.

c) Diskutieren Sie ihre numerischen Ergebnisse und ermitteln Sie, an welchen Stellen bei allgemeinen Optimierungsaufgaben Probleme auftreten könnten.