Prof. Dr. Karsten Urban
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

SoSe 2014
Blatt 6
11.07.2014

Angewandte Numerik 1

Abgabetermin: Freitag, 25.07.2014, **vor der Übung**

Dieses Übungsblatt hat eine Bearbeitungszeit von zwei Wochen. Beachten Sie, dass nicht alle Aufgaben mit dem Stoff der Vorlesung vom 10.07.2014 bearbeitet werden können.

Für dieses Übungsblatt gibt es 17 Theorie- und 12 Matlab-Punkte, sowie 16 Theorie- und 9 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.

Zum Bestehen der **Vorleistung** sind insgesamt 67,5 Theorie- und 63,5 Matlabpunkte nötig. Benötigen Sie zum Bestehen der Vorleistung noch Punkte aus diesem Übungsblatt, so vermerken Sie dies bitte **deutlich** auf der ersten Seite Ihrer Abgabe, damit eine schnelle Korrektur des Übungsblattes erfolgen kann.

Bitte melden Sie sich bis **spätestens Montag, 21.07.2014** zur Vorleistung an. Die Anmeldung ist bereits jetzt möglich.

Die **Klausuren** finden am 04.08.2014 und am 06.10.2014 statt. Die genaue Uhrzeit und die Raumeinteilung werden über die Homepage bekannt gegeben. Beachten Sie die Homepage bitte auch wegen möglicherweise kurzfristig veröffentlichter Hinweise zu den Klausuren.

Als **Hilfsmittel zu den Klausuren** ist nur ein eigenhändig beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt zugelassen. Insbesondere sind Taschenrechner nicht erlaubt.

Aufgabe 38 *(Gewichte von Quadraturformeln)* (3T Punkte)

Bestimmen Sie die Gewichte λ_i der Quadraturformel

$$\hat{I}_2(f) = (b-a)\sum_{i=0}^{2} \lambda_i f(x_i) \quad \approx \quad \int_a^b f(x)dx$$

mit den Knoten

$$x_0 = \frac{3a+b}{4}, \quad x_1 = \frac{2a+2b}{4}, \quad x_2 = \frac{a+3b}{4}.$$

Aufgabe 39 *(Fehlerordnung von Quadraturformeln)* (3T+3T Punkte)

Der Fehler einer Quadraturformel $\hat{I}(f)$ zur Approximation des Integrals $I(f)$ ist definiert als

$$E(f) := I(f) - \hat{I}(f)$$

a) Zeigen Sie, dass der Fehler linear ist, d. h. dass

$$E(\lambda f + \mu g) = \lambda E(f) + \mu E(g).$$

Hinweis: Verwenden Sie hierbei, dass für die Addition von Funktionen

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

und für die Multiplikation von Funktionen mit Skalaren

$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

gilt.

Bemerkung: Aufgrund der Linearität des Quadraturfehlers kann die Fehlerordnung einer Quadraturformel leicht über die Monome getestet werden.

b) Welche Fehlerordnung hat die folgende Quadraturformel?

$$\hat{I}(f) = \frac{3}{8} f\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{2}{8} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{8} f\left(\frac{5}{6}\right) \approx \int_0^1 f(x)\,dx$$

Aufgabe 40 *(Gauss-Quadraturformeln)* (4T+4T Punkte)

Gesucht ist eine Quadraturformel der Form

$$\hat{I}(f) := \lambda_1 f\left(\frac{1}{3}\right) + \lambda_2 f(x_2)$$

zur Approximation von

$$\int_0^1 f(x)\,dx.$$

a) Bestimmen Sie die Gewichte λ_1 und λ_2 und den freien Knoten x_2 so, dass die Ordnung m der Formel möglichst groß wird. Geben Sie die Fehlerordnung Ihrer Quadraturformel an.

Hinweis: Betrachten Sie die Monome $f_k(x) = x^k$ für $k = 0, 1, 2$ und lösen Sie das resultierende Gleichungssytem.

b) Vergleichen Sie für

$$\int_{-1}^2 e^x\,dx$$

die Ergebnisse der auf das Intervall $[-1, 2]$ transformierten Formel $\hat{I}$ mit den entsprechenden Werten der Trapezregel und der Mittelpunktregel.

Aufgabe 41 *(Programmieraufgabe: Zusammengesetzte Quadraturformeln)* (6M+6M Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $\quad -\infty < a < b < \infty$ und $h = (b-a)/n$.
Wir wollen in dieser Aufgabe zusammengesetzte Quadraturformeln zur Approximation von $I(f) := \int_a^b f(x)\,dx$ betrachten, und zwar die zusammengesetzte (summierte) Mittelpunktregel, die zusammengesetzte Trapezregel (Trapezsumme) und die zusammengesetzte Simpsonregel. Die Simpsonregel finden Sie in Beispiel 7.2.5.

a) Schreiben Sie Matlabfunktionen `int = mittelpunktSumme(f,a,b,n)`, `int = trapezSumme(f,a,b,n)` und `int = simpsonSumme(f,a,b,n)` zur näherungsweisen Berechnung des Integrals $I(f)$ mit den oben genannten Methoden. Die Funktionen erhalten jeweils den Integrand `f` als Funktionszeiger, die Intervallgrenzen `a` und `b`, sowie die Anzahl `n` der Teilintervalle. Zurückgegeben wird jeweils der Integralwert `int`.

b) Schreiben Sie ein Matlab-Skript, welches Ihre Funktionen für das Integral

$$I(f) := \int_0^1 \frac{4}{x^2+1}\,dx = \pi$$

testet. Berechnen Sie dazu für $n = 2^1, ..., 2^{10}$ mit allen drei Regeln das Integral und den absoluten Fehler. Stellen Sie anschließend den Fehler in doppelt logarithmischer Skala in Abhängigkeit von n dar. Erklären Sie das Ergebnis.

Aufgabe 42 *(Tschebyscheff-Polynome und Gauß-Tschebyscheff-Quadratur)* (4T*+4T* Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Tschebyscheff-Polynome T_k bezüglich der positiven Gewichtsfunktion

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

orthogonal sind, d. h. dass

$$\int_{-1}^{1} T_k(x)\,T_j(x)\;\omega(x)\,dx = \begin{cases} \pi & j = k = 0 \\ \frac{\pi}{2} & j = k > 0 \\ 0 & j \neq k. \end{cases}$$

Hinweis: Verwenden Sie $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ und substituieren Sie $x = \cos t$.

b) Zeigen Sie, dass die Gewichte λ_k der Tschebyscheff-Quadratur

$$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad \approx \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, f(x_k)$$

durch $\lambda_k = \frac{\pi}{n+1}$ gegeben sind, wobei x_k die Nullstellen des $(n+1)$-ten Tschebyscheff-Polynoms bezeichnet.

Hinweis: Sie können beispielsweise Satz 7.3.27 aus dem Skript verwenden.

Aufgabe 43 *(Programmieraufgabe: Einfache, zusammengesetze und Legendre-Gauss-Quadraturformeln)*
(4T*+3M*+(4T*+6M*) Punkte)

Gegeben sind die drei Integrale

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(5\sin x)\,dx,$$
$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{10^{-3}+x^2}\,dx,$$
$$I_3 = \int_0^1 \sqrt{x}\sin(x)\,dx.$$

a) Approximieren Sie die Integrale mit den abgeschlossenen Newton-Cotes-Formeln für $n = 1,\dots,4$ (Trapezregel, Simpsonregel, Newtonsche $\frac{3}{8}$-Regel und Milne-Regel). Die Gewichte und Knoten finden Sie im Skript. Es ist Ihnen hierbei frei gestellt, ob Sie dies per Hand berechnen oder sich entsprechende Hilfsprogramme schreiben (die Punkte werden als Theoriepunkte gewertet). Was beobachten Sie?

b) Approximieren Sie dieselben Integrale mit der summierten Simpson-Regel. Verfeinern Sie die Zerlegung schrittweise. Hierzu können Sie die Matlab-Funktion aus Aufgabe 41 verwenden. Was beobachten Sie jetzt?

c) Approximieren Sie die Integrale mittels Gauss-Quadratur zur Gewichtsfunktion $w(x) = 1$ für $n = 1,\dots,5$.

   i) Bestimmen Sie die Gewichte und Knoten für $n = 1$. D. h. gegeben sei

   $$\hat{I}_1(f) = \lambda_0^{(1)} f(\tau_0^{(1)}) + \lambda_1^{(1)} f(\tau_1^{(1)}).$$

   Bestimmen Sie $\lambda_0^{(1)}, \lambda_1^{(1)}, \tau_0^{(1)}, \tau_1^{(1)}$, so dass $\hat{I}_1(f) \approx \int_{-1}^1 f(x)\,dx$ gilt. Geben Sie die resultierende Quadraturformel an.

   ii) Die anderen Knoten und Gewichte auf dem Intervall $[-1,1]$ sind

n	$\tau_i^{(n)}$	$\lambda_i^{(n)}$
2	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm\frac{1}{5}\sqrt{15}$	$\frac{5}{9}$
3	$\pm\frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{36}(18+\sqrt{30})$
	$\pm\frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{36}(18-\sqrt{30})$
4	0	$\frac{128}{225}$
	$\pm\frac{1}{21}\sqrt{245-14\sqrt{70}}$	$\frac{1}{900}(322+13\sqrt{70})$
	$\pm\frac{1}{21}\sqrt{245+14\sqrt{70}}$	$\frac{1}{900}(322-13\sqrt{70})$
5	±0.9324695142031520	0.1713244923791703
	±0.6612093864662645	0.3607615730481386
	$\pm0.2386191860831969\,3$	0.4679139345726910

   Schreiben Sie zur Approximation der oben stehenden Integrale eine Matlab-Funktion. Welches Verhalten beobachten Sie?

Hinweise:
Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Senden Sie alle Files in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt06** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de** (Abgabetermin jeweils wie beim Theorieteil). Drucken Sie zusätzlich allen Programmcode sowie die Ergebnisse aus und geben Sie diese vor der Übung ab. Der Source Code sollte strukturiert und, wenn nötig, dokumentiert sein.