Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Pascal Heiter
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Sommersemester 2014

Numerische Analysis - Übungsblatt 6

(Abgabe: Dienstag, 8. Juli 2014 **vor** der Übung)

Aufgabe 20 *(Basis und Dimension von $\mathcal{S}^m(\mathcal{T})$)* (10 Punkte)

Es sei die *abgeschnittene Potenzfunktion* wie folgt definiert

$$(\cdot)_+ : \mathbb{R} \to [0,\infty), \quad (x)_+ := \begin{cases} x & \text{, falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Weiter sei $\mathcal{T} = \{x_i,\ i = 0, ..., n \mid a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ und

$$\mathcal{B} := \{(\cdot - x_0)^0, (\cdot - x_0)^1, ..., (\cdot - x_0)^m, (\cdot - x_1)_+^m, (\cdot - x_2)_+^m, ..., (\cdot - x_{n-1})_+^m\}$$

eine Menge von Funktionen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{S}^m(\mathcal{T})$ bildet und insbesondere

$$\dim(\mathcal{S}^m(\mathcal{T})) = m - 1 + |\mathcal{T}| = m + n.$$

Aufgabe 21 *(Berechnung von Splines, LaTeX)* (4+(4+2)=10 Punkte)

a) Bestimmen Sie $s \in \mathcal{S}^3(\mathcal{T})$ mit $\mathcal{T} = \{-1, 0, 1\}$, welches die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sin(\pi x)$$

interpoliert. Hierbei sollen die vollständigen Randbedingungen

$$s'(-1) = f'(-1) \qquad \text{und} \qquad s'(1) = f'(1)$$

gelten.

b) Sei $t \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{T} = \{0, 1, 2\}$ mit den Funktionswerten $f(0) = 0, f(1) = t$ und $f(2) = 0$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t

i) die zugehörige lineare Spline-Interpolationsfunktion $s \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$

ii) die zugehörige kubische Spline-Interpolationsfunktion $s \in \mathcal{S}^3(\mathcal{T})$ mit natürlichen Randbedingungen.

Aufgabe 22 *(Error estimation in $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$)* (10 Punkte)

Let $f \in \mathcal{C}^2(a, b)$, $\mathcal{T} = \{x_i,\ i = 0, ..., n \mid a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ and $s \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ be the spline, which interpolates f. Further, let

$$h_i := x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, .., n) \qquad \text{and} \qquad h := \max_{1 \leq i \leq n} h_i.$$

Prove the following inequality

$$||f - s||_{\infty,[a,b]} \leq \frac{h^2}{8} ||f''||_{\infty,[a,b]}.$$

Aufgabe 23 *(Schnittpunkt zwischen kubischen Splines und Geraden)* (10 Punkte)

Sei $s \in \mathcal{S}^3(\mathcal{T})$ mit $\mathcal{T} = \{0, 1, 2\}$ und $g(x) = mx + z$ mit $m, z \in \mathbb{R}$ eine beliebige Gerade. Leiten Sie einen effizienten (!) Algorithmus zur Suche des/der Schnittpunkte(s) zwischen kubischen Splines und Geraden her und beziehen Sie dabei ihre Überlegungen auf

$$s(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x & , x \in [0, 1] \\ x^3 - 6x^2 + 9x - 2 & , x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Hinweis: Mögliche Ideen wären Nullstellensuche, Bounding Box, Sturm'sche Ketten...