Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Pascal Heiter
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Sommersemester 2014

Numerische Analysis - Matlabblatt 5

(Abgabe: **bis Dienstag, 1. Juli 2014**, Besprechung: Freitag, 4. Juli 2014)

Aufgabe 11 *(Newton-Cotes-Formel)* (5 Punkte)

Die klassische Newton-Cotes-Formel bei einer äquidistanten Knotenwahl $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n = b$ lautet

$$\hat{I}_n(f) = (b-a)\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \left(\approx \int_a^b f(x)\, dx \right).$$

a) Schreiben Sie eine Funktion

```
I = newtonCotes(f,a,b,m,method)
```

die zu

- `f` - Funktion als *function handle*
- `a`,`b` - Intervall $[a, b]$
- `m` - die Anzahl der Teilintervalle
- `method` - Option, ob die (summierte) Mittelpunktsformel (`'Mittelpunkt'`) oder Trapezsumme (`'Trapez'`) verwendet werden soll

das Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ mit Hilfe der Mittelpunktsformel bzw. Trapezsumme numerisch berechnet.

b) Schreiben Sie ein Testskript `testNewtonCotes.m`, welches die Integrale

$$\int_{-2}^{2} e^x + x^3 + \frac{1}{1+x^4}\, dx \qquad \text{und} \qquad \int_{-10}^{10} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

numerisch berechnet. Plotten Sie jeweils den Fehler für $m = 2, 2^2, ..., 2^{14}$ zur "exakten" Lösung, welche Sie mit der Matlabroutine `integral` berechnen können.

Aufgabe 12 *(Horner's Scheme)* (5 Punkte)

a) Write a function

```
[fx,dfx] = hornerNewton(a,z,x)
```

with

- `a` - vector of coefficients $a = (a_0, a_1, ..., a_{n+1})$
- `z` - points of evaluation
- `x` - vector containing the nodes $x = (x_0, x_1, ..., x_n)$

which evaluates a polynomial

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_{n+1}(x - x_0)(x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_n)$$

in Newton representation at a point `z` and simultaneous calculates the derivative $p'(x_0)$ using Horner's scheme.

b) Write a script `testHorner.m`, which tests your function with

$$p(x) = 2 + (x - 1) + 3(x - 1)(x + 1) - 4(x - 1)(x + 1)(x - 2)$$

evaluating $p(x)$ and $p'(x)$ for $x = 3$ and $x = 4$.

Aufgabe 13 *(Wahl der Interpolationsknoten)* (10 Punkte)

Wir wollen mit dieser Aufgabe den Einfluss der Wahl der Interpolationsknoten auf die Güte der Approximation einer Funktion durch ein Interpolationspolynom betrachten.

a) Schreiben Sie eine Funktion

```
c = newtonCoeff(x,fx)
```

die zu den Stützstellen `x =` $(x_0, ..., x_n)$ und `fx =` $(f(x_0), ..., f(x_n))$ die Koeffizienten des Newton'sches Interpolationpolynoms mittels dividierte Differenzen berechnet und im Vektor `c` zurückliefert.

b) Schreiben Sie ein Skript `bestNodes.m`, welches den maximalen Interpolationsfehler

$$\max_{x\in[-1,1]} ||f(x) - P[f](x)||_2$$

doppelt logarithmisch zur Anzahl der Interpolationsknoten plottet. Dabei soll $P[f]$ als Newton'sche Interpolationpolynoms jeweils zu unterschiedlichen Interpolationsknoten bestimmt werden. Wählen Sie für die Anzahl der Stützstellen $n = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$ und für die Interpolationsknoten

a) die Nullstellen der Legendre-Polynome
b) die Nullstellen der Tschebyscheff-Polynome
c) äquidistante Knoten.

Betrachten Sie die Funktionen

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{sowie} \qquad f_2(x) = \arctan x$$

und diskutieren Sie die Ergebnisse. Was fällt auf? Woran könnte das Phänomen liegen?

Hinweis: Verwenden Sie die Funktion `legendreRoots` *aus Aufgabe 9 um die Nullstellen der Legendre-Polynome zu bestimmen sowie* `hornerNewton` *aus Aufgabe 12 zum Auswerten der Interpolationspolynome.*

c) Ändern Sie das Skript aus b) derart ab, dass Sie die Interpolationsknoten jeweils mit Hilfe der Funktion `leja` (siehe Homepage) sortierten und testen Sie erneut das Skript mit $n = 2, 2^2, ..., 2^{10}$. Was fällt jetzt auf? Diskutieren Sie die Ergebnisse.

d) Sei $f(x) = |x|$. Es gilt bekanntlich $f \notin C^1([-1,1])$. Schreiben Sie ein Skript `interpolateAbs.m`, welches die Funktion f durch das Newton'sche Interpolationpolynom approximiert und plotten Sie doppelt logarithmisch den Interpolationsfehler gegen die Anzahl der Knoten. Verwenden Sie die Nullstellen der Tschebyscheff-Polynome als Interpolationsknoten sowie für die Anzahl der Knoten jeweils $n = 2, 2^2, ..., 2^{12}$. Diskutieren Sie das Ergebnis.

Hinweis: Die Rechnungen können eine Weile in Anspruch nehmen.