Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mladjan Radic
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik IV
SoSe 2014

Übungsblatt 12

Besprechung 25.07.2014.

Aufgabe 1 (FEM-Approximation) (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Finite-ElementeApproximation des Randwertproblems

$$-u''(x) + u(x) = x, \qquad u(0) = u(\pi) = 0,$$

bezüglich der Basis $\sin(x), \dots, \sin(nx)$.
Hinweis: Nutzen Sie die Orthogonalität der Basisfunktionen und ihrer Ableitungen:

$$\int_0^\pi \sin(jx)\sin(kx)dx = \int_0^\pi \cos(jx)\cos(kx)dx = \frac{\pi}{2}\delta_{j,k}$$

für $0 < j, k$.

Aufgabe 2 (Anwendung von Lax-Milgram) (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die quadratische Form

$$\int_0^1 u'(x)^2 + u(x)\ln(x)dx - u\left(\frac{1}{2}\right)$$

ein eindeutiges Minimum $u \in H_0^1(0,1)$ besitzt.
Hinweis: Verifizieren Sie die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram. Wählen Sie dazu eine geeignete Bilinearform und ein geeignetes lineares Funktional. Benutzen Sie, dass für $u \in H_0^1(0,1), u(x) = \int_0^x u'(y)dy$.

Aufgabe 3 (Laplace in Polarkoordinaten) (5 Punkte)

Zeigen Sie: Der Laplace-Operator bezüglich Polarkoordinaten, d.h. $(x, y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ mit $r \in \mathbb{R}_+$ und $\varphi \in [-\pi, \pi]$ ist gegeben durch

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Berechnen Sie weiter Δu für $u = r^{\frac{2}{3}}\sin(\frac{2}{3}\varphi)$.