ulm university universität uulm

Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mladjan Radic
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik IV
SoSe 2014

Übungsblatt 3

Besprechung 16.05.2014.

Aufgabe 1 (Einschrittverfahren) (2 Punkte)

Wir betrachten für ein Einschrittverfahren die folgende Verfahrensfunktion

$$\phi(t, y, h) = a_1 f(t, y) + a_2 f\big(t + b_1 h, y + b_2 h f(t, y)\big)$$

Die Funktion $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig partiell differenzierbar und h sei die Schrittweite. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_1, a_2, b_1 und b_2 so, dass sich die Konvergenzordnung 2 ergibt.

Aufgabe 2 (RKV) (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein Runge-Kutta-Verfahren genau dann konsistent ist für alle $f \in \mathcal{C}^1$, falls $\gamma_1 + \cdots + \gamma_m = 1$ gilt. Zeigen Sie weiter, dass um Konvergenzordnung 2 zu realisieren, zusätzlich

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{i,j}, \qquad i = 1, \ldots, m \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \alpha_i = \frac{1}{2}$$

gelten muss.

Aufgabe 3 (Konstruktion von RK-Verfahren) (2 Punkte)

Konstruieren Sie alle Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung der Form

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ c_2 & c_2 & & \\ c_3 & 0 & c_3 & \\ \hline & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Aufgabe 4 (RKV - Programmieraufgabe) (5 Punkte)

Implementieren Sie das verbesserte Euler-Verfahren, sowie das klassiche Runge-Kutta-Verfahren und die Kutta'sche 3/8-Regel aus Beispiel 1.4.7 (Skript, S.15). Testen Sie Ihre Verfahren an den folgenden Beispielen

(i) $u'(t) = u(t)$, $u(0) = 1$ für $t \in [0, 1]$.

(ii) $u'(t) = -2tu(t)^2$, $u(0) = 1$ für $t \in [0, 1]$.

(iii) Für $t \in [0, 1]$

$$\begin{array}{rclrrrl} y_1'(t) & = & & y_2(t) & -y_3(t), & & y_1(0) = 1, \\ y_2'(t) & = & -2y_1(t) & +3y_2(t) & -y_3(t), & & y_2(0) = -1, \\ y_3'(t) & = & -y_1(t) & +y_2(t) & +y_3(t), & & y_3(0) = 2. \end{array}$$

Varrieren Sie hierbei (sinnvoll!) die Schrittweite der jeweiligen Verfahren. Vergleichen Sie für verschiedene Schrittweiten das explizite Euler-Verfahren mit dem verbessertem Euler-Verfahren.