Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mladjan Radic
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von PDE's II
SoSe 2015

Übungsblatt 1

Besprechung 24.04.2015.

Hinweise:

a) Im SLC zur Veranstaltung "Numerik von partiellen Differenzialgleichungen II" anmelden.

b) Theorie-Aufgaben werden von den Studenten in den jeweiligen Übungen vorgerechnet und vorgestellt! Die Matlab-Aufgaben werden ebenfalls in der jeweiligen Übung vorgestellt. Es wird Anwesenheit vorausgesetzt!

c) Zulassungskriterien zur Prüfung: 50% der Übungspunkte müssen erreicht und zudem muss mindestens 1 mal vorgerechnet werden.

d) Die Abgabe der Lösungen der Matlab-Aufgaben erfolgt per Email (rechtzeitig vor der Besprechung, d.h. mindestens einen Tag vorher an

mladjan.radic@uni-ulm.de.

Der Betreff sollte lauten: "NumPDE2Blattx" (wobei x für die Nummer des jeweiligen Blattes steht). Die Lösungen müssen als Anhang an die Email versendet werden. Für jede Programmieraufgabe ist ein zip-file "AufgabeMy" zu erstellen (wobei y für die Nummer der Aufgabe steht), das die nötigen .m-files enthält.

Aufgabe 1 (Lipschitz-Stetigkeit) (5 Punkte)

Wir betrachten zunächst die folgende PPDE: Suche $u(\mu) \in X$ und einen Output $s(\mu)$, sodass für gegebene Funktionale $f, \ell \in X'$ gilt:

$$\begin{aligned} a(u(\mu), v; \mu) &= f(v; \mu), \qquad \forall v \in Y, \\ s(\mu) &= \ell(u(\mu)) \end{aligned} \tag{1}$$

Wir betrachten weiter die affinen Zerlegungen der Bilinearform $a(\cdot, \cdot; \mu)$ (welche koerziv ist), sowie von f, ℓ der Form

$$a(u, v; \mu) = \sum_{q=1}^{Q_a} \theta_q^a(\mu) a_q(u, v), \qquad f(v; \mu) = \sum_{q=1}^{Q_f} \theta_q^f(\mu) f_q(v), \qquad \ell(v; \mu) = \sum_{q=1}^{Q_\ell} \theta_q^\ell(\mu) \ell_q(v)$$

Zeigen Sie, falls die Koeffizientenfunktionen $\theta_q^\ell, \theta_q^a, \theta_q^f$ Lipschitz-stetig bezüglich μ sind, so sind auch die Formen a, f, ℓ und die Lösungen $u(\mu), s(\mu)$ Lipschitz-stetig bezüglich μ.

Aufgabe 2 (Differenzierbarkeit) **(5 Punkte)**

Mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 1 zeigen Sie, dass falls die Koeffizientenfunktionen $\theta_q^a, \theta_q^f, \theta_q^\ell$ differenzierbar sind bezüglich μ, so ist die Lösung $u(\mu)$ differenzierbar bezüglich μ und die partiellen Ableitungen (Sensitivitätsableitungen) $\partial_{\mu_i} u(\mu) \in X$ für $i = 1, \ldots, p$ genügen dem Sensitivitätsproblem

$$a(\partial_{\mu_i} u(\mu), v; \mu) = \tilde{f}_i(v; u(\mu), \mu),$$

wobei die rechte Seite $\tilde{f}_i(\cdot; u(\mu), \mu) \in X'$ gegeben ist durch

$$\tilde{f}_i(\cdot; u(\mu), \mu) := \sum_{q=1}^{Q_f} \left(\partial_{\mu_i} \theta_q^f(\mu)\right) f_q(\cdot) - \sum_{q=1}^{Q_a} \left(\partial_{\mu_i} \theta_q^a(\mu)\right) a_q(u(\mu), \cdot).$$

Aufgabe 3 (Wohlgestelltheit) **(5 Punkte)**

Wir bezeichnen mit $\gamma_a(\mu), \gamma_f(\mu), \gamma_\ell(\mu)$ die Stetigkeitskonstanten bezüglich $a(\cdot,\cdot;\mu), f(\cdot;\mu), \ell(\cdot)$. Die Bilinearform a bzw. die Linearformen f, ℓ heißen gleichmäßig stetig, falls Konstanten $\bar{\gamma}_a, \bar{\gamma}_f, \bar{\gamma}_\ell < \infty$ unabhängig von μ existieren, sodass

$$\gamma_a(\mu) \leq \bar{\gamma}_a, \qquad \gamma_f(\mu) \leq \bar{\gamma}_f, \qquad \gamma_\ell(\mu) \leq \bar{\gamma}_\ell.$$

Die Bilinearform a heißt gleichmäßig koerziv, falls eine Konstante $\bar{\alpha}$ unabhängig von μ existiert, sodass

$$\inf_{u \in X} \frac{a(u, u, \mu)}{\|u\|} \geq \alpha(\mu) \geq \bar{\alpha} > 0, \qquad \forall \mu.$$

Zeigen Sie, dass das Problem (1) eine eindeutige Lösung besitzt und dass

$$\|u(\mu)\| \leq \frac{\|f\|_{X'}}{\alpha(\mu)} \leq \frac{\bar{\gamma}_f}{\bar{\alpha}},$$
$$|s(\mu)| \leq \|\ell\|_{X'} \|u(\mu)\| \leq \frac{\bar{\gamma}_f \bar{\gamma}_\ell}{\bar{\alpha}}.$$

Aufgabe 4 (RBmatlab) **(0 Punkte)**

Machen Sie sich mit RBmatlab vertraut:

`http://www.ians.uni-stuttgart.de/MoRePaS/software/index.html`.