Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mladjan Radic
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von PDE's II
SoSe 2015

Übungsblatt 1 - Musterlösung

Aufgabe 1 (Lipschitz-Stetigkeit) (5 Punkte)

Wir betrachten zunächst die folgende PPDE: Suche $u(\mu) \in X$ und einen Output $s(\mu)$, sodass für gegebene Funktionale $f, \ell \in X'$ gilt:

$$\begin{aligned} a(u(\mu), v; \mu) &= f(v; \mu), \qquad \forall v \in Y, \\ s(\mu) &= \ell(u(\mu)) \end{aligned} \tag{1}$$

Wir betrachten weiter die affinen Zerlegungen der Bilinearform $a(\cdot, \cdot; \mu)$ (welche koerziv ist), sowie von f, ℓ der Form

$$a(u, v; \mu) = \sum_{q=1}^{Q_a} \theta_q^a(\mu) a_q(u, v), \qquad f(v; \mu) = \sum_{q=1}^{Q_f} \theta_q^f(\mu) f_q(v), \qquad \ell(v; \mu) = \sum_{q=1}^{Q_\ell} \theta_q^\ell(\mu) \ell_q(v)$$

Zeigen Sie, falls die Koeffizientenfunktionen $\theta_q^\ell, \theta_q^a, \theta_q^f$ Lipschitz-stetig bezüglich μ sind, so sind auch die Formen a, f, ℓ und die Lösungen $u(\mu), s(\mu)$ Lipschitz-stetig bezüglich μ.

Lösung

Da a parametertrennbar ist, existieren stetige parameterunabhängige Bilinearformen $a_q(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$, $1 \leq q \leq Q_a$ mit

$$a(u, v; \mu) = \sum_{q=1}^{Q_a} \theta_q^a(\mu) a(u, v).$$

Wegen der Lipschitz-Stetigkeit von θ_q^a, $1 \leq q \leq Q_a$, bezüglich μ existiert ein $\tilde{L} > 0$, sodass für alle $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}$ gilt:

$$|\theta_q^a(\mu_1) - \theta_q^a(\mu_2)| \leq \tilde{L} \|\mu_1 - \mu_2\|, \qquad q = 1, \ldots, Q_a.$$

Wegen der Stetigkeit von $a_q(\cdot, \cdot)$, $1 \leq q \leq Q_a$, existiert ein $c > 0$, sodass $|a_q(u, v)| \leq c\|u\|\|v\|$ für alle $u, v \in X$ und für $1 \leq q \leq Q_a$. Wähle nun $L := \tilde{L} \cdot c \cdot Q_a > 0$. Dann gilt für alle $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} |a(u, v; \mu_1) - a(u, v; \mu_2)| &= \left| \sum_{q=1}^{Q_a} (\theta_q^a(\mu_1) - \theta_q^a(\mu_2)) a_q(u, v) \right| \leq \sum_{q=1}^{Q_a} |\theta_q^a(\mu_1) - \theta_q^a(\mu_2)| \cdot |a_q(u, v)| \\ &\leq c \cdot \|u\| \cdot \|v\| \cdot \tilde{L} \cdot Q_a \cdot \|\mu_1 - \mu_2\| = L \cdot \|u\| \cdot \|v\| \cdot \|\mu_1 - \mu_2\|, \qquad u, v \in X \end{aligned}$$

Das zeigt die Lipschitz-Stetigkeit von $a(\cdot, \cdot)$ bezüglich μ. Analog lässt sich auch die Lipschitz-Stetigkeit von ℓ und f zeigen. Um die Lipschitz-Stetigkeit von u zu zeigen, betrachten wir die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} a(u(\mu_1), v; \mu_1) &= f(v; \mu_1) \\ a(u(\mu_2), v; \mu_2) &= f(v; \mu_2) \end{aligned}$$

Nun gilt mit der Bilinearität von $a(\cdot,\cdot;\mu)$ und wegen der Lipschitz-Stetigkeit von $f(\cdot;\mu)$ und $a(\cdot,\cdot;\mu)$ bezüglich μ für jedes $v \in X$:

$$\begin{aligned}
|a\left(u(\mu_1)-u(\mu_2),v;\mu_1\right)| &= |a(u(\mu_1),v;\mu_1)-a(u(\mu_2),v;\mu_1)| \\
&= |a(u(\mu_1),v;\mu_1)-a(u(\mu_2),v;\mu_2)+a(u(\mu_2),v;\mu_2)-a(u(\mu_2),v;\mu_1)| \\
&= |f(v;\mu_1)-f(v;\mu_2)+a(u(\mu_2),v;\mu_2)-a(u(\mu_2),v;\mu_1)| \\
&\leq |f(v;\mu_1)-f(v;\mu_2)|+|a(u(\mu_2),v;\mu_2)-a(u(\mu_2),v;\mu_1)| \\
&\leq L_f\|v\|\cdot\|\mu_1-\mu_2\|+L_a\|u(\mu_2)\|\|v\|\cdot\|\mu_1-\mu_2\|
\end{aligned}$$

Da unsere Lösung $u(\mu)$ beschränkt ist durch $\frac{\overline{\gamma}_f}{\overline{\alpha}}$ gilt weiter:

$$\begin{aligned}
|a\left(u(\mu_1)-u(\mu_2),v;\mu_1\right)| &\leq L_f\|v\|\cdot\|\mu_1-\mu_2\|+L_a\cdot\frac{\overline{\gamma}_f}{\overline{\alpha}}\cdot\|v\|\cdot\|\mu_1-\mu_2\| \\
&= \left(L_f\|v\|+L_a\cdot\frac{\overline{\gamma}_f}{\overline{\alpha}}\cdot\|v\|\right)\|\mu_1-\mu_2\|
\end{aligned}$$

Setze nun $v := u(\mu_1)-u(\mu_2)$. Dann gilt wegen der Koerzivität von $a(\cdot,\cdot;\mu)$:

$$\alpha(\mu_1) := \inf_{u(\mu_1)-u(\mu_2)\in X\backslash\{0\}} \frac{a\left(u(\mu_1)-u(\mu_2),u(\mu_1)-u(\mu_2);\mu_1\right)}{\|u(\mu_1)-u(\mu_2)\|^2} > 0,$$

und wegen der gleichmäßigen Koerzivität von $a(\cdot,\cdot;\mu_1)$ existiert sogar ein $\tilde{\alpha}\in\mathbb{R}$ mit $\alpha(\mu_1)\geq\tilde{\alpha}>0$ für alle $\mu_1\in\mathcal{P}$. Daher gilt für $u(\mu_1)-u(\mu_2)\in X\backslash\{0\}$ beliebig aber fest:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\alpha} \leq \frac{a\left(u(\mu_1)-u(\mu_2),u(\mu_1)-u(\mu_2);\mu_1\right)}{\|u(\mu_1)-u(\mu_2)\|^2} \\
&\Leftrightarrow \tilde{\alpha}\cdot\|u(\mu_1)-u(\mu_2)\|^2 \leq a\left(u(\mu_1)-u(\mu_2),u(\mu_1)-u(\mu_2);\mu_1\right)
\end{aligned}$$

Wegen $a\left(u(\mu_1)-u(\mu_2),u(\mu_1)-u(\mu_2);\mu_1\right)>0$ gilt also:

$$\tilde{\alpha}\cdot\|u(\mu_1)-u(\mu_2)\|^2 \leq |a\left(u(\mu_1)-u(\mu_2),u(\mu_1)-u(\mu_2);\mu_1\right)|$$

Insgesamt gilt also mit $v=u(\mu_1)-u(\mu_2)\neq 0$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}\cdot\|u(\mu_1)-u(\mu_2)\|^2 &\leq \left(L_f\|u(\mu_1)-u(\mu_2)\|+L_a\cdot\frac{\overline{\gamma}_f}{\overline{\alpha}}\|u(\mu_1)-u(\mu_2)\|\right)\|\mu_1-\mu_2\| \\
&= \left(L_f+L_a\cdot\frac{\overline{\gamma}_f}{\overline{\alpha}}\right)\|\mu_1-\mu_2\|\cdot\|u(\mu_1)-u(\mu_2)\|
\end{aligned}$$

Durch Äquivalenzumformung erhält man also schlussendlich:

$$\|u(\mu_1)-u(\mu_2)\| \leq \left(\frac{L_f}{\tilde{\alpha}}+L_a\cdot\frac{\overline{\gamma}_f}{\tilde{\alpha}\overline{\alpha}}\right)\|\mu_1-\mu_2\|.$$

Wähle demnach $L := \frac{L_f}{\tilde{\alpha}}+L_a\cdot\frac{\overline{\gamma}_f}{\tilde{\alpha}\overline{\alpha}}$ Dann gilt für alle $\mu_1,\ \mu_2\in\mathcal{P}$:

$$\|u(\mu_1)-u(\mu_2)\| \leq L\cdot\|\mu_1-\mu_2\|.$$

Dieses zeigt die Lipschitz-Stetigkeit von $u(\mu)$. Ähnlich kann man auch die Lipschitz-Stetigkeit von $s(\mu)$ zeigen.

Aufgabe 2 (Differenzierbarkeit) (5 Punkte)

Mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 1 zeigen Sie, dass falls die Koeffizientenfunktionen $\theta_q^a,\theta_q^f,\theta_q^\ell$ differenzierbar sind bezüglich μ, so ist die Lösung $u(\mu)$ differenzierbar bezüglich μ und die partiellen Ableitungen (Sensitivitätsableitungen) $\partial_{\mu_i}u(\mu)\in X$ für $i=1,\dots,p$ genügen dem Sensitivitätsproblem

$$a(\partial_{\mu_i}u(\mu),v;\mu)=\tilde{f}_i(v;u(\mu),\mu),$$

wobei die rechte Seite $\tilde{f}_i(\cdot;u(\mu),\mu)\in X'$ gegeben ist durch

$$\tilde{f}_i(\cdot;u(\mu),\mu) := \sum_{q=1}^{Q_f}\left(\partial_{\mu_i}\theta_q^f(\mu)\right)f_q(\cdot)-\sum_{q=1}^{Q_a}\left(\partial_{\mu_i}\theta_q^a(\mu)\right)a_q(u(\mu),\cdot).$$

Lösung

Mit Hilfe des Differenzenquotienten ist es leicht zu zeigen, dass

$$\partial_{\mu_i} a_q(v(\mu), w(\mu)) = a_q(\partial_{\mu_i} v(\mu), w(\mu)) + a_q(v(\mu), \partial_{\mu_i} w(\mu)) \qquad \forall q = 1, \ldots, Q_a.$$

Leiten wir nun (1) nach μ_i ab unter Berücksichtigung der Parametertrennbarkeit, so erhalten wir leicht

$$\begin{aligned}
\partial_{\mu_i} a(u(\mu), v; \mu) &= \partial_{\mu_i} \left(\sum_{q=1}^{Q_a} \theta_q^a(\mu) a_q(u(\mu), v) \right) \\
&= \sum_{q=1}^{Q_a} \left(\partial_{\mu_i} \theta_q^a(\mu) \right) a_q(u(\mu), v) + \left(\sum_{q=1}^{Q_a} \theta_q^a(\mu) a_q(\partial_{\mu_i} u(\mu), v) \right) \\
&= \partial_{\mu_i} f(v; u(\mu), \mu) = \sum_{q=1}^{Q_f} \left(\partial_{\mu_i} \theta_q^f(\mu) \right) f_q(v).
\end{aligned}$$

also

$$a(\partial_{\mu_i} u(\mu), v; \mu) = \tilde{f}_i(v; u(\mu), \mu).$$

Da a_q für alle $q = 1, \ldots, Q_a$ beschränkt sind, erhalten wir mit Lax-Milgram die Existenz sowie die Eindeutigkeit von $\partial_{\mu_i} u(\mu)$.

Aufgabe 3 (Wohlgestelltheit) (5 Punkte)

Wir bezeichnen mit $\gamma_a(\mu), \gamma_f(\mu), \gamma_\ell(\mu)$ die Stetigkeitskonstanten bezüglich $a(\cdot, \cdot; \mu), f(\cdot; \mu), \ell(\cdot)$. Die Bilinearform a bzw. die Linearformen f, ℓ heißen gleichmäßig stetig, falls Konstanten $\bar{\gamma}_a, \bar{\gamma}_f, \bar{\gamma}_\ell < \infty$ unabhängig von μ existieren, sodass

$$\gamma_a(\mu) \leq \bar{\gamma}_a, \qquad \gamma_f(\mu) \leq \bar{\gamma}_f, \qquad \gamma_\ell(\mu) \leq \bar{\gamma}_\ell.$$

Die Bilinearform a heißt gleichmäßig koerziv, falls eine Konstante $\bar{\alpha}$ unabhängig von μ existiert, sodass

$$\inf_{u \in X} \frac{a(u, u, \mu)}{\|u\|} \geq \alpha(\mu) \geq \bar{\alpha} > 0, \qquad \forall \mu.$$

Zeigen Sie, dass das Problem (1) eine eindeutige Lösung besitzt und dass

$$\begin{aligned}
\|u(\mu)\| &\leq \frac{\|f\|_{X'}}{\alpha(\mu)} \leq \frac{\bar{\gamma}_f}{\bar{\alpha}}, \\
|s(\mu)| &\leq \|\ell\|_{X'} \|u(\mu)\| \leq \frac{\bar{\gamma}_f \bar{\gamma}_\ell}{\bar{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Lösung

Die Existenz, die Eindeutigkeit und die Grenze von $u(\mu)$ folgt aus dem Satz von Babuska-Lax-Milgram. Zunächst einmal existiert nach dem Satz von Riesz ein eindeutiges $w(\mu) \in X$ mit

$$f(v; \mu) = \langle w, v \rangle, \qquad \forall v \in X,$$

d.h. Gleichung (1) lässt sich auch folgendermaßen beschreiben: Es ex. ein eindeutiges $w(\mu) \in X$, sodass für alle $v \in X$ gilt:

$$a(u(\mu), v; \mu) = \langle w, v \rangle.$$

Weiter existiert nach dem Satz von Babuška-Lax-Milgram ein invertierbarer und beschränkter linearer Operator $T_\mu : X \to X$, sodass für alle $v \in X$ gilt:

$$a(u(\mu), v; \mu) = \langle T_\mu u(\mu), v \rangle = \langle w, v \rangle.$$

Wähle als Lösung demnach $u(\mu) = T_\mu^{-1} w(\mu)$. Daraus folgt die Existenz der Lösung. Die Eindeutigkeit folgt wegen der Eindeutigkeit von T_μ und von w. Weiter erhält man mit der Koerzivität von a und nach dem Satz von Babuška-Lax-Milgram die Abschätzung

$$\|T_\mu^{-1}\| = \|u(\mu)\| \leq \frac{\|f(\cdot;\mu)\|_{X'}}{\alpha(\mu)}. \tag{2}$$

Da aber a sogar gleichmäßig koerziv ist und f gleichmäßig stetig, existiert ein $\overline{\gamma}_f \in \mathbb{R}$ mit $\|f(\cdot;\mu)\|_{X'} \leq \overline{\gamma}_f$ für alle $\mu \in P$ und es ex. ein $\overline{\alpha} \in \mathbb{R}$ mit $\alpha(\mu) \geq \overline{\alpha} > 0$ für alle $\mu \in P$. Daher erhält man aus (2) weiter:

$$\|u(\mu)\| \leq \frac{\|f(\cdot;\mu)\|_{X'}}{\alpha(\mu)} \leq \frac{\overline{\gamma}_f}{\overline{\alpha}}.$$

Mit der Definition des Output-Funktionals erhalten wir

$$|s(\mu)| = |\ell(u(\mu))| \leq \|\ell(\cdot;\mu)\|_{X'} \, \|u(\mu)\|.$$

Mit der gleichmäßigen Stetigkeit von ℓ folgt letzendlich

$$|s(\mu)\| \leq \|\ell(\cdot;\mu)\|_{X'} \cdot \|u(\mu)\| \leq \frac{\overline{\gamma}_\ell \overline{\gamma}_f}{\overline{\alpha}}.$$

Das war zu zeigen.

Aufgabe 4 (RBmatlab) (0 Punkte)

Machen Sie sich mit RBmatlab vertraut:

`http://www.ians.uni-stuttgart.de/MoRePaS/software/index.html`.