



Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mladjan Radic
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von PDE's II
SoSe 2015

Übungsblatt 6

Besprechung 29.05.2015.

Ziel dieser Übung ist es, den Greedy-Algorithmus 7.1 zu implementieren. Dafür brauchen wir insbesondere einen (effizient berechenbaren) Fehlerschätzer. Wir wissen:

$$e_N(\mu)_X \leq \Delta_N(\mu) := \frac{\|r_N(\cdot; \mu)\|_{X'}}{\alpha_{LB}(\mu)}$$

mit Residuum $r_N(\cdot; \mu) : X^{\mathcal{N}} \rightarrow \mathbb{R}$, $r_N(v; \mu) = f(v; \mu) - a(u_N(\mu), v; \mu)$.

Vorbereitung 1:

(I) *Min- Θ Ansatz für $\alpha_{LB}(\mu)$:*

Machen Sie sich mit der Funktion `getAlpha_LB` vertraut.

(II) *Dual-Norm des Residuums:*

Der Riesz-Repräsentant $\hat{r}_N(\mu) \in X^{\mathcal{N}}$ von $r_N(\mu)$ erfüllt nach dem Satz von Riesz-Fréchet die Gleichung

$$(\hat{r}_N(\mu), v)_X = r_N(v; \mu) \quad \forall v \in X^{\mathcal{N}}. \quad (1)$$

- Warum können wir $\|r_N(\cdot; \mu)\|_{X'}$ nicht direkt berechnen?
- Zeigen Sie, dass $\|r_N(\cdot; \mu)\|_{X'} = \|\hat{r}_N(\mu)\|_X$ gilt.
- Was für ein Gleichungssystem muss für (1) also aufgestellt werden? Schreiben Sie dieses in Matrix-Vektor-Schreibweise auf. Wie wird insbesondere die rechte Seite berechnet?
- Wie wird dann (in Matrix-Vektor-Schreibweise) $\|r_N(\cdot; \mu)\|_{X'}$ berechnet?
- Vollziehen Sie nach, wie die obigen Schritte in der Funktion `getErrEst_direct` umgesetzt werden.

Aufgabe 1 (Greedy-Algorithmus, erste ineffiziente Version)

(10 Punkte)

Implementieren Sie den Greedy-Algorithmus 7.1, um eine reduzierte Basis für das Heizblock-Problem zu konstruieren.

- Verwenden Sie z.B. $n_{\text{train}} = 101$ logarithmisch gleichverteilte Zufallsvariablen für Ξ_{train} .
- Machen Sie sich das Leben leichter, indem Sie noch einen Anfangsparameter $\mu_0^* := \mu_{\min}$ übergeben und im Algorithmus zunächst noch den Initialisierungsschritt $S_0^* := \{\mu_0^*\}$, $X_0^* := \text{span}\{u(\mu_0^*)\}$ einfügen.
- Verwenden Sie hier noch den ineffizienten Fehlerschätzer `getErrEst_direct`.
- Orthonormalisieren Sie zur Stabilisierung mit Gram-Schmidt die Snapshots $u(\mu_n^*)$, $1 \leq n \leq N$, um die Basisfunktionen ξ_n , $1 \leq n \leq N$, zu erhalten.

Vorbereitung 2:

(III) Offline-Online-Zerlegung :

Wir nutzen nun die affine Zerlegung der Formen $f(v; \mu)$ und $a(u, v; \mu)$ aus. Mit einer RB-Basis $\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ gilt $u_N(\mu) = \sum_{n=1}^N u_{n,N}(\mu)\xi_n$ und damit

$$r_N(v; \mu) = \sum_{q=1}^{Q_f} \theta_f^q(\mu) f^q(v) - \sum_{q=1}^{Q_a} \sum_{n=1}^N \theta_a^q(\mu) u_{n,N}(\mu) a^q(\xi_n, v).$$

Jetzt können wir die Riesz-Repräsentanten für die parameter-unabhängigen Formen berechnen, also

$$\begin{aligned} (\hat{f}_q, v)_X &= f^q(v) & \forall v \in X^{\mathcal{N}}, 1 \leq q \leq Q_f, \\ (\hat{a}_{n,q}, v)_X &= -a^q(\xi_n, v) & \forall v \in X^{\mathcal{N}}, 1 \leq q \leq Q_a, 1 \leq n \leq N. \end{aligned}$$

Damit gilt dann

$$\hat{r}_N(v; \mu) = \sum_{q=1}^{Q_f} \theta_f^q(\mu) \hat{f}_q + \sum_{q=1}^{Q_a} \sum_{n=1}^N \theta_a^q(\mu) u_{n,N}(\mu) \hat{a}_{n,q}. \quad (2)$$

- Aus was für einem Raum sind die $\hat{f}_q, \hat{a}_{n,q}$? Wie werden sie also in Matlab dargestellt?
- Wie kann nun also $\|r_N(\cdot; \mu)\|_{X'}$ in $\mathcal{O}((Q_f + NQ_a)^2)$ Operationen berechnet werden?

Hinweis: Im Skript sind alle affinen Terme von $\hat{r}_N(\mu)$ als $\theta_r^q(\mu), v_r^q$ zusammengefasst. Machen Sie sich klar, wie der Vektor $\theta_r(\mu)$ und die Matrix \underline{G} genau aussehen, wenn man Zerlegung (2) hat.

- Zu welchem Zeitpunkt im Greedy-Algorithmus kann welcher Riesz-Repräsentant in der Zerlegung (2) berechnet werden?

Aufgabe 2 (Greedy-Algorithmus, effiziente Version)

(10 Punkte)

Modifizieren Sie nun Ihre Lösung aus Aufgabe 1, derart dass Sie einen Fehlerschätzer `getErrEst_decomp` auf der Basis von (2) implementieren, um damit insgesamt einen effizienten Trainings-Algorithmus zu erhalten.

Aufgabe 3 (Greedy-Algorithmus, Version wie im Skript)

(10 Punkte)

Modifizieren Sie nun Ihre Lösung aus Aufgabe 2, um wie im Skript eine Version ohne vorgegebenen Initial-Parameter μ_0^* zu erhalten. Im Wesentlichen müssen Sie dazu einen Fehlerschätzer für eine leere Basis ausrechnen können.