

Übungsblatt 7 - Lösung

Vorbereitung I - Problemformulierung

Auf diesem Übungsblatt möchten wir uns ein wenig mit zeitabhängigen Problemen beschäftigen. Dazu definieren wir zunächst die Hilbert-Räume $H_0^1(\Omega) \subset Y \subset H^1(\Omega)$ und $X = L_2(\Omega)$. Sei weiter das Zeitintervall $I = (0, t_f]$ gegeben, $\bar{I} = [0, t_f]$. Wir diskretisieren $\bar{I}$ in K äquidistante Teilintervalle, mit $\Delta t = \frac{t_f}{K}$ und definieren $t^k = k\Delta t$, $k = 0, \dots, K$, sowie $\tau = \{t^0, \dots, t^K\}$. Unser Output sei definiert durch

$$s(\mu; t^k) = \ell(u(\mu, t^k)), \quad \forall k = 0, \dots, K,$$

wobei $u(\mu, t^k) \in Y$ für alle k die folgende schwache Formulierung für ein parabolisches Problem erfüllt:

$$m(u(\mu, t^k), v; \mu) + \Delta t \cdot a(u(\mu, t^k), v; \mu) = m(u(\mu, t^{k-1}), v; \mu) + \Delta t \cdot f(v; \mu), \quad \forall v \in Y, \quad \forall k.$$

mit Anfangswertbedingung $u(\mu, t^0) = y_0(\mu) = 0$. Wir fordern, dass m, a stetig bezüglich der assoziierten Räumen sind,

$$\begin{aligned} a(w, v; \mu) &\leq \gamma(\mu) \|w\|_Y \|v\|_Y, & \forall w, v \in Y, \forall \mu, \\ m(w, v; \mu) &\leq \rho(\mu) \|w\|_X \|v\|_X, & \forall w, v \in Y, \forall \mu. \end{aligned}$$

und koerziv

$$\begin{aligned} 0 < \alpha_0 &\leq \alpha(\mu) = \inf_{v \in Y} \frac{a(v, v; \mu)}{\|v\|_Y^2}, \\ 0 < \sigma_0 &\leq \sigma(\mu) = \inf_{v \in Y} \frac{m(v, v; \mu)}{\|v\|_X^2}. \end{aligned}$$

a und m sollen zudem symmetrisch sein und affin zerlegbar, f, ℓ stetig. Das assoziierte duale Problem formulieren wir wie folgt: Suche $\Psi(\mu, t^k) \in Y$, sodass

$$m(v, \Psi(\mu, t^k); \mu) + \Delta t \cdot a(v, \Psi(\mu, t^k); \mu) = m(v, \Psi(\mu, t^{k+1}); \mu), \quad \forall v \in Y, \quad k = 0, \dots, K.$$

mit der Endzeitbedingung

$$m(v, \Psi(\mu, t^{K+1}); \mu) = \ell(v), \quad \forall v \in Y.$$

Vorbereitung II - RBM

Die Parametersamplings seien bezeichnet durch $S_{N_{\text{pr}}}^{\text{pr}} = \{\tilde{\mu}_1^{\text{pr}}, \dots, \tilde{\mu}_{N_{\text{pr}}}^{\text{pr}}\}$ und $S_{N_{\text{du}}}^{\text{du}} = \{\tilde{\mu}_1^{\text{du}}, \dots, \tilde{\mu}_{N_{\text{du}}}^{\text{du}}\}$ mit $\tilde{\mu} = (\mu, t^k)$. Im Allgemeinen ist $S_{N_{\text{pr}}}^{\text{pr}} \neq S_{N_{\text{du}}}^{\text{du}}$. Wir definieren dann den Reduzierten Basis Raum

$$W_{N_{\text{pr}}}^{\text{pr}} = \text{span}\{\zeta_n^{\text{pr}} := u(\tilde{\mu}_n^{\text{pr}}), \quad 1 \leq n \leq N_{\text{pr}}\}, \quad W_{N_{\text{du}}}^{\text{pr}} = \text{span}\{\zeta_n^{\text{du}} := \Psi(\tilde{\mu}_n^{\text{du}}), \quad 1 \leq n \leq N_{\text{du}}\}.$$

Die reduzierten Lösungen bezeichnen wir mit $u_N(\mu, t^k)$, sowie $\Psi_N(\mu, t^k)$, welche die Gleichungen

$$m(u_N(\mu, t^k), v; \mu) + \Delta t \cdot a(u_N(\mu, t^k), v; \mu) = m(u_N(\mu, t^{k-1}), v; \mu) + \Delta t \cdot f(v; \mu), \quad \forall v \in W_{N_{\text{pr}}}^{\text{pr}}, \quad \forall k,$$

mit $u_N(\mu, t^0) = 0$, sowie

$$m(v, \Psi_N(\mu, t^k); \mu) + \Delta t \cdot a(v, \Psi_N(\mu, t^k); \mu) = m(v, \Psi_N(\mu, t^{k+1}); \mu), \quad \forall v \in W_{N_{\text{du}}}^{\text{du}}, \quad k = 0, \dots, K,$$

mit Endzeitpunktbedingung

$$m(v, \Psi_N(\mu, t^{K+1}); \mu) = \ell(v), \quad \forall v \in W_{N_{\text{du}}}^{\text{du}}.$$

erfüllen. Auswertung des Outputs $s_N(\mu, t^k)$ schätzen wir ab durch

$$s_N(\mu, t^k) = \ell(u_N(\mu, t^k)) + \Delta t \cdot \sum_{\kappa=1}^k R^{\text{pr}}(\Psi_N(\mu, t^{K-k+\kappa}); \mu, t^\kappa), \quad \forall k = 0, \dots, K,$$

wobei die primalen, sowie dualen Residuen gegeben sind durch

$$\begin{aligned} R^{\text{pr}}(v; \mu, t^k) &= f(v; \mu) - a(u_N(\mu, t^k), v; \mu) - \frac{1}{\Delta t} m(u_N(\mu, t^k) - u_N(\mu, t^{k-1}), v; \mu), \\ R^{\text{du}}(v; \mu, t^k) &= -a(v, \Psi_N(\mu, t^k); \mu) - \frac{1}{\Delta t} m(v, \Psi_N(\mu, t^k) - \Psi_N(\mu, t^{k+1}); \mu), \end{aligned}$$

für alle $\forall v \in Y$ und für alle $k = 0, \dots, K$, und deren Dualnormen

$$\varepsilon_{N_{\text{pr}}}^{\text{pr}}(\mu, t^k) = \sup_{v \in Y} \frac{R^{\text{pr}}(v; \mu, t^k)}{\|v\|_Y}, \quad \varepsilon_{N_{\text{du}}}^{\text{du}}(\mu, t^k) = \sup_{v \in Y} \frac{R^{\text{du}}(v; \mu, t^k)}{\|v\|_Y}, \quad \forall k = 0, \dots, K.$$

Die inneren Produkte seien spezifiziert durch $(\cdot, \cdot)_Y := a(\cdot, \cdot; \mu_{\text{ref}})$, $(\cdot, \cdot)_X := m(\cdot, \cdot; \mu_{\text{ref}})$. Der primale bzw. duale Fehler sei definiert durch $e^{\text{pr}}(\mu, t^k) := u(\mu, t^k) - u_N(\mu, t^k)$ bzw. $e^{\text{du}}(\mu, t^k) := \Psi(\mu, t^k) - \Psi_N(\mu, t^k)$. Wir definieren weiter die Energienormen:

$$\begin{aligned} |||v(\mu, t^k)|||^{\text{pr}} &:= \left(m(v(\mu, t^k), v(\mu, t^k); \mu) + \Delta t \cdot \sum_{\kappa=1}^k a(v(\mu, t^\kappa), v(\mu, t^\kappa); \mu) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in Y, \\ |||v(\mu, t^k)|||^{\text{du}} &:= \left(m(v(\mu, t^k), v(\mu, t^k); \mu) + \Delta t \cdot \sum_{\kappa=k}^K a(v(\mu, t^\kappa), v(\mu, t^\kappa); \mu) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in Y. \end{aligned}$$

Aufgabe 1 (Primaler Fehler)

(10 Punkte)

Zeigen Sie, dass der primale Fehler abgeschätzt werden kann durch

$$|||e^{\text{pr}}(\mu, t^k)|||^{\text{pr}} \leq \Delta_{N_{\text{pr}}}^{\text{pr}}(\mu, t^k), \quad \forall k = 0, \dots, K,$$

wobei $\Delta_{N_{\text{pr}}}^{\text{pr}}(\mu, t^k)$ gegeben ist durch

$$\Delta_{N_{\text{pr}}}^{\text{pr}}(\mu, t^k) := \left(\frac{\Delta t}{\alpha(\mu)} \sum_{\kappa=1}^k \varepsilon_{N_{\text{pr}}}^{\text{pr}}(\mu, t^\kappa)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Lösung

Durch Einsetzen sehen wir schnell, dass die folgende Gleichung für den primalen Fehler erfüllt ist

$$m(e^{\text{pr}}(\mu, t^k), v; \mu) + \Delta t \cdot a(e^{\text{pr}}(\mu, t^k), v; \mu) = m(e^{\text{pr}}(\mu, t^{k-1}), v; \mu) + \Delta t \cdot R^{\text{pr}}(v; \mu, t^k)$$

für alle $v \in Y$, $k = 1, \dots, K$, wobei $e^{\text{pr}}(\mu, t^0) = 0$, da nach Voraussetzung $u(\mu, t^0) = u_N(\mu, t^0) = 0$. Wähle nun $v = e^{\text{pr}}(\mu, t^k)$ und wir wenden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf den gemischten Term

$m(e^{\text{pr}}(\mu, t^{k-1}), e^{\text{pr}}(\mu, t^k); \mu)$ an und erhalten mit der Abkürzung $e^{\text{pr},k} := e^{\text{pr}}(\mu, t^k)$

$$\begin{aligned}
m(e^{\text{pr},k}, e^{\text{pr},k}; \mu) + \Delta t \cdot a(e^{\text{pr},k}, e^{\text{pr},k}; \mu) &= m(e^{\text{pr},k-1}, e^{\text{pr},k}; \mu) + \Delta t \cdot R^{\text{pr}}(e^{\text{pr},k}; \mu, t^k) \\
&\leq \sqrt{m(e^{\text{pr},k}, e^{\text{pr},k}; \mu)} \cdot \sqrt{m(e^{\text{pr},k-1}, e^{\text{pr},k-1}; \mu)} + \Delta t \cdot \frac{R^{\text{pr}}(e^{\text{pr},k}; \mu, t^k)}{\|e^{\text{pr},k}\|_Y} \|e^{\text{pr},k}\|_Y \\
&\leq \sqrt{m(e^{\text{pr},k}, e^{\text{pr},k}; \mu)} \cdot \sqrt{m(e^{\text{pr},k-1}, e^{\text{pr},k-1}; \mu)} + \Delta t \cdot \sup_{v \in Y} \left\{ \frac{R^{\text{pr}}(v; \mu, t^k)}{\|v\|_Y} \right\} \cdot \|e^{\text{pr},k}\|_Y \\
&\leq \sqrt{m(e^{\text{pr},k}, e^{\text{pr},k}; \mu)} \cdot \sqrt{m(e^{\text{pr},k-1}, e^{\text{pr},k-1}; \mu)} + \Delta t \cdot \varepsilon_{N_{\text{pr}}}^{\text{pr}}(\mu, t^k) \cdot \|e^{\text{pr},k}\|_Y.
\end{aligned} \tag{1}$$

Wir wenden die Young-Ungleichung

$$2ab \leq \frac{a^2}{\rho^2} + \rho^2 b^2 \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R}, \rho > 0 \tag{2}$$

nun zwei mal an. Wir wählen nun zunächst $a = \sqrt{m(e^{\text{pr},k}, e^{\text{pr},k}; \mu)}$, $b = \sqrt{m(e^{\text{pr},k-1}, e^{\text{pr},k-1}; \mu)}$ und $\rho = 1$ und erhalten

$$\sqrt{m(e^{\text{pr},k}, e^{\text{pr},k}; \mu)} \cdot \sqrt{m(e^{\text{pr},k-1}, e^{\text{pr},k-1}; \mu)} \leq \frac{1}{2} m(e^{\text{pr},k}, e^{\text{pr},k}; \mu) + \frac{1}{2} m(e^{\text{pr},k-1}, e^{\text{pr},k-1}; \mu).$$

Als nächstes wählen wir $a = \varepsilon_{N_{\text{pr}}}^{\text{pr}}(\mu, t^k)$, $b = \|e^{\text{pr},k}\|_Y$ und $\rho = \alpha(\mu)^{\frac{1}{2}}$ und erhalten mit Hilfe der Koerzivität von a

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{N_{\text{pr}}}^{\text{pr}}(\mu, t^k) \cdot \|e^{\text{pr},k}\|_Y &\leq \frac{1}{2\alpha(\mu)} \varepsilon_{N_{\text{pr}}}^{\text{pr}}(\mu, t^k)^2 + \frac{1}{2} \alpha(\mu) \|e^{\text{pr},k}\|_Y^2 \\
&\leq \frac{1}{2\alpha(\mu)} \varepsilon_{N_{\text{pr}}}^{\text{pr}}(\mu, t^k)^2 + \frac{1}{2} a(e^{\text{pr},k}, e^{\text{pr},k}; \mu).
\end{aligned}$$

Setzen wir diese zwei Ungleichungen nun in (1) ein, so erhalten wir

$$m(e^{\text{pr},k}, e^{\text{pr},k}; \mu) - m(e^{\text{pr},k-1}, e^{\text{pr},k-1}; \mu) + \Delta t \cdot a(e^{\text{pr},k}, e^{\text{pr},k}; \mu) \leq \frac{\Delta t}{\alpha(\mu)} \varepsilon_{N_{\text{pr}}}^{\text{pr}}(\mu, t^k)^2.$$

Wir summieren von $\kappa = 1$ bis k und erhalten mit der Verwendung der Teleskopsumme, sowie $e^{\text{pr}}(\mu, t^0) = 0$

$$m(e^{\text{pr},k}, e^{\text{pr},k}; \mu) + \Delta t \cdot \sum_{\kappa=1}^k a(e^{\text{pr},\kappa}, e^{\text{pr},\kappa}; \mu) \leq \frac{\Delta t}{\alpha(\mu)} \sum_{\kappa=1}^k \varepsilon_{N_{\text{pr}}}^{\text{pr}}(\mu, t^\kappa)^2.$$

für alle $k = 1, \dots, K$. Mit der Definition von $\|\cdot\|^{\text{pr}}$ ergibt dies die Behauptung.

Vorbereitung III

Es lässt sich für den dualen Fehler zeigen, dass folgende Gleichung gilt mit $e^{\text{du}}(\mu, t^{K+1}); \mu := \Psi(\mu, t^{K+1}) - \Psi_N(\mu, t^{K+1})$:

$$m(v, e^{\text{du}}(\mu, t^{K+1}); \mu) = R^{\Psi_f}(v; \mu) := \ell(v) - m(v, \Psi_N(\mu, t^{K+1}); \mu), \quad \forall v \in Y.$$

Es lässt sich folgende Ungleichung beweisen:

$$\|e^{\text{du}}(\mu, t^{K+1})\|_X \leq \Delta_{N_{\text{du}}}^{\Psi_f}(\mu) := \frac{\varepsilon_{N_{\text{du}}}^{\Psi_f}(\mu)}{\sigma(\mu)}, \quad \varepsilon_{N_{\text{du}}}^{\Psi_f}(\mu) := \sup_{v \in Y} \frac{R^{\Psi_f}(v; \mu)}{\|v\|_X}.$$

Mit dieser Abschätzung lässt sich leicht beweisen, dass die folgende Ungleichung gilt:

$$m(e^{\text{du}}(\mu, t^{K+1}), e^{\text{du}}(\mu, t^{K+1}); \mu) = R^{\Psi_f}(v; \mu) := \ell(v) - m(v, \Psi_N(\mu, t^{K+1}); \mu) \tag{3}$$

$$\leq \varepsilon_{N_{\text{du}}}^{\Psi_f}(\mu) \|e^{\text{du}}(\mu, t^{K+1})\|_X \leq \sigma(\mu) \Delta_{N_{\text{du}}}^{\Psi_f}(\mu)^2. \tag{4}$$

Wir schließen nun daraus, dass im Spezialfall wenn $m(\cdot, \cdot)$ parameter-unabhängig ist, dass $\Psi(\mu, t^{K+1}) \in W_{N_{\text{du}}}^{\text{du}}$ und somit $e^{\text{du}}(\mu, t^{K+1}) = 0$ ist.

Aufgabe 2 (Dualer Fehler)

(10 Punkte)

Zeigen Sie, dass der duale Fehler abgeschätzt werden kann durch

$$\|e^{\text{du}}(\mu, t^k)\|^{\text{du}} \leq \Delta_{N_{\text{du}}}^{\text{du}}(\mu, t^k), \quad \forall k = 0, \dots, K,$$

wobei $\Delta_{N_{\text{du}}}^{\text{du}}(\mu, t^k)$ gegeben ist durch

$$\Delta_{N_{\text{du}}}^{\text{du}}(\mu, t^k) := \left(\frac{\Delta t}{\alpha(\mu)} \sum_{\kappa=k}^K \varepsilon_{N_{\text{du}}}^{\text{du}}(\mu, t^\kappa)^2 + \sigma(\mu) \cdot \Delta_{N_{\text{du}}}^{\Psi_f}(\mu)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Lösung

Durch Einsetzen sehen wir schnell, dass die folgende Gleichung für den dualen Fehler erfüllt ist

$$m(v, e^{\text{du}}(\mu, t^k); \mu) + \Delta t \cdot a(v, e^{\text{du}}(\mu, t^k); \mu) = m(v, e^{\text{du}}(v, \mu, t^{k+1}); \mu) + \Delta t \cdot R^{\text{du}}(v; \mu, t^k)$$

für alle $v \in Y$ und alle $k = 1, \dots, K$. Ähnlich zu Aufgabe 1 wählen wir nun $v = e^{\text{du}}(\mu, t^k)$, sowie Anwenden der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} m(e^{\text{du},k}, e^{\text{du},k}; \mu) + \Delta t \cdot a(e^{\text{du},k}, e^{\text{du},k}; \mu) &= m(e^{\text{du},k}, e^{\text{du},k+1}; \mu) + \Delta t \cdot R^{\text{du}}(e^{\text{du},k}; \mu, t^k) \\ &\leq \sqrt{m(e^{\text{du},k}, e^{\text{du},k}; \mu)} \cdot \sqrt{m(e^{\text{du},k+1}, e^{\text{du},k+1}; \mu)} + \Delta t \cdot \frac{R^{\text{du}}(e^{\text{du},k}; \mu, t^k)}{\|e^{\text{du},k}\|_Y} \|e^{\text{du},k}\|_Y \\ &\leq \sqrt{m(e^{\text{du},k}, e^{\text{du},k}; \mu)} \cdot \sqrt{m(e^{\text{du},k+1}, e^{\text{du},k+1}; \mu)} + \Delta t \cdot \sup_{v \in Y} \left\{ \frac{R^{\text{du}}(v; \mu, t^k)}{\|v\|_Y} \right\} \cdot \|e^{\text{du},k}\|_Y \\ &\leq \sqrt{m(e^{\text{du},k}, e^{\text{du},k}; \mu)} \cdot \sqrt{m(e^{\text{du},k+1}, e^{\text{du},k+1}; \mu)} + \Delta t \cdot \varepsilon_{N_{\text{du}}}^{\text{du}}(\mu, t^k) \cdot \|e^{\text{du},k}\|_Y, \end{aligned} \quad (5)$$

wobei wir auch hier wie in Aufgabe 1 die abkürzende Schreibweise $e^{\text{du},k} = e^{\text{du}}(\mu, t^k)$ verwendet haben. Wir wenden weiter wie in Aufgabe 1 die Young-Ungleichung (2) zwei mal an. Zuerst wählen wir $a = \sqrt{m(e^{\text{du},k}, e^{\text{du},k}; \mu)}$, $b = \sqrt{m(e^{\text{du},k+1}, e^{\text{du},k+1}; \mu)}$ und $\rho = 1$ und erhalten

$$\sqrt{m(e^{\text{du},k}, e^{\text{du},k}; \mu)} \cdot \sqrt{m(e^{\text{du},k+1}, e^{\text{du},k+1}; \mu)} \leq \frac{1}{2} m(e^{\text{du},k}, e^{\text{du},k}; \mu) + \frac{1}{2} m(e^{\text{du},k+1}, e^{\text{du},k+1}; \mu).$$

Als nächstes wählen wir $a = \varepsilon_{N_{\text{du}}}^{\text{du}}(\mu, t^k)$, $b = \|e^{\text{du},k}\|_Y$ und $\rho = \alpha(\mu)^{\frac{1}{2}}$ und erhalten mit Hilfe der Koerzivität von a

$$\begin{aligned} \varepsilon_{N_{\text{du}}}^{\text{du}}(\mu, t^k) \cdot \|e^{\text{du},k}\|_Y &\leq \frac{1}{2\alpha(\mu)} \varepsilon_{N_{\text{du}}}^{\text{du}}(\mu, t^k)^2 + \frac{1}{2} \alpha(\mu) \|e^{\text{du},k}\|_Y^2 \\ &\leq \frac{1}{2\alpha(\mu)} \varepsilon_{N_{\text{du}}}^{\text{du}}(\mu, t^k)^2 + \frac{1}{2} a(e^{\text{du},k}, e^{\text{du},k}; \mu). \end{aligned}$$

Setzen wir diese zwei Ungleichungen nun in (5) ein, so erhalten wir

$$m(e^{\text{du},k}, e^{\text{du},k}; \mu) - m(e^{\text{du},k+1}, e^{\text{du},k+1}; \mu) + \Delta t \cdot a(e^{\text{du},k}, e^{\text{du},k}; \mu) \leq \frac{\Delta t}{\alpha(\mu)} \varepsilon_{N_{\text{du}}}^{\text{du}}(\mu, t^k)^2.$$

Wir summieren von $\kappa = k$ bis K und erhalten wieder mit der Verwendung der Teleskopsumme

$$m(e^{\text{du},k}, e^{\text{du},k}; \mu) - m(e^{\text{du},K+1}, e^{\text{du},K+1}; \mu) + \Delta t \cdot \sum_{\kappa=k}^K a(e^{\text{du},\kappa}, e^{\text{du},\kappa}; \mu) \leq \frac{\Delta t}{\alpha(\mu)} \sum_{\kappa=k}^K \varepsilon_{N_{\text{du}}}^{\text{du}}(\mu, t^\kappa)^2.$$

für alle $k = 1, \dots, K$. Wir benutzen nun die Endzeitpunktbedingung $m(v, e^{\text{du}}(\mu, t^{K+1}); \mu) = R^{\Psi_f}(v; \mu)$ und (4) und erhalten somit

$$\begin{aligned} m(e^{\text{du},k}, e^{\text{du},k}; \mu) + \Delta t \cdot \sum_{\kappa=k}^K a(e^{\text{du},\kappa}, e^{\text{du},\kappa}; \mu) &\leq \frac{\Delta t}{\alpha(\mu)} \sum_{\kappa=k}^K \varepsilon_{N_{\text{du}}}^{\text{du}}(\mu, t^\kappa)^2 + m(e^{\text{du},K+1}, e^{\text{du},K+1}; \mu) \\ &= \frac{\Delta t}{\alpha(\mu)} \sum_{\kappa=k}^K \varepsilon_{N_{\text{du}}}^{\text{du}}(\mu, t^\kappa)^2 + R^{\Psi_f}(v; \mu) \leq \frac{\Delta t}{\alpha(\mu)} \sum_{\kappa=k}^K \varepsilon_{N_{\text{du}}}^{\text{du}}(\mu, t^\kappa)^2 + \sigma(\mu) \Delta_{N_{\text{du}}}^{\Psi_f}(\mu)^2. \end{aligned}$$

für alle $k = 1, \dots, K$. Mit der Definition von $\|\cdot\|^{\text{du}}$ ergibt dies die Behauptung.