Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Andreas Bantle
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Sommersemester 2015

Numerische Analysis - Theorie-Blatt 1
Lösung

(Abgabe am 28.04.2015 **vor** der Übung!)

Hinweise

(i) Bitte melden Sie sich im SLC für die Vorlesung an.

(ii) Abgabe der Übungsblätter nur **zu zweit**! (Bis auf max. eine Ausnahme ;))

(iii) Zulassungskriterium für die Klausur: 50% der Übungspunkte der MATLAB- sowie der Theorie-Blätter.

(iv) Auf jedem Theorie-Übungsblatt wird es eine auf Englisch gestellte Aufgabe sowie eine Aufgabe, die in LaTeX abgegeben werden muss, geben. Die auf Englisch gestellte Aufgabe kann auf Deutsch beantwortet werden, handschriftliche Lösungen der LaTeX- Aufgabe werden mit 0 Punkten bewertet!

(v) Außerdem müssen die '*.tex'-Dateien der LaTeX-Aufgabe per Email an **numerik2ss15@gmail.com** mit dem Betreff

Blatt_Blattnumer, Name1 Vorname1, Name2 Vorname2

gesendet werden (Nachnamen alphabetisch sortiert!), also z.B für das erste Theorieblatt von Max Maier und Steffen Schneider:

Blatt_01, Maier Max, Schneider Steffen

Aufgabe 1 *(Berechnung von $\sqrt{2}$, LaTeX)* (5 + 6 + 6 Punkte)

In dieser Aufgabe soll $\sqrt{2}$ als Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - 2$ numerisch approximiert werden.

(i) Formulieren Sie das Newton Verfahren für f und zeigen Sie: Falls $x_k \in I = [\sqrt{2}, 2]$, dann gilt $x_{k+1} \in [\sqrt{2}, x_k] \subset I$.

(ii) Führen Sie 3 Schritte des Newton Verfahrens mit Startwert $x_0 = 2$ durch.

(iii) Führen Sie 3 Schritte der Regula Falsi mit Startwerten $a_0 = 1$ und $b_0 = 2$ durch.

Lösung

(i) $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{x_k^2+2}{2x_k}$.
Es gilt (wegen $x_k \geq \sqrt{2} \Rightarrow 2 \leq x_k^2$): $x_{k+1} = \frac{x_k^2+2}{2x_k} \leq \frac{2x_k^2}{2x_k} = x_k$. Außerdem gilt mit $\varphi(x) = \frac{x^2+2}{2x}$, dass $\varphi'(x) = \frac{x^2-2}{2x^2} \geq 0 \ \forall x \geq \sqrt{2}$. Damit ist φ monoton wachsend und es gilt $\varphi(x) \geq \varphi(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

(ii) $x_0 = 2$, $x_1 = 3/2$, $x_2 = 17/12$, $x_3 = 1.41422$.

(iii)

$$\begin{aligned}
[a_0, b_0] &= [1, 2] \\
[a_1, b_1] &= [4/3, 2] \\
[a_2, b_2] &= [7/5, 2] \\
[a_3, b_3] &= [1.411765, 2]
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 *(Newton Verfahren)* (8 Punkte)

Die Funktion $f \in C^m(\mathbb{R})$ habe eine m-fache Nullstelle in $z \in \mathbb{R}$, wobei $m > 1$. Bestimmen Sie die Konvergenzordnung bzw. bei linearer Konvergenz den Konvergenzfaktor L des Newton Verfahrens.

Lösung Es gilt

$$|x_{k+1} - z| = |x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - z|.$$

Wir führen eine Taylor Entwicklung von f und f' um z durch und erhalten (für $\xi, \psi \in (\min\{x_k, z\}, \max\{x_k, z\})$)

$$\begin{aligned}
f(x_k) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(z)}{k!}(x_k - z)^k + \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(x_k - z)^m = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(x_k - z)^m \\
f'(x_k) &= \sum_{k=0}^{m-2} \frac{f^{(k+1)}(z)}{k!}(x_k - z)^k + \frac{f^{(m)}(\psi)}{(m-1)!}(x_k - z)^{m-1} = \frac{f^{(m)}(\psi)}{(m-1)!}(x_k - z)^{m-1},
\end{aligned}$$

da die ersten $m-1$ Ableitungen von f null sind (f hat eine m-fache Nullstelle). Setzen wir dies oben ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
|x_{k+1} - z| &= |x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - z| \\
&= \left|(x_k - z) - \frac{f^{(m)}(\xi)(x_k - z)^m (m-1)!}{m! f^{(m)}(\psi)(x_k - z)^{m-1}}\right| = \left|(x_k - z)\left(1 - \frac{f^{(m)}(\xi)}{m f^{(m)}(\psi)}\right)\right|
\end{aligned}$$

Wegen $x_k \to z$ gilt auch $\xi \to z$ und $\psi \to z$ und damit $\left|\frac{f^{(m)}(\xi)}{f^{(m)}(\psi)}\right| \to 1$. Somit konvergiert das Verfahren linear mit Konvergenzfaktor $L = 1 - \frac{1}{m}$.

Aufgabe 3 *(Bisektion)* (3 + 2 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass die Gleichung $x = \cos(x)$ eine eindeutige Lösung $x \in [0, \infty)$ besitzt.

(ii) Bestimmen Sie die Lösung numerisch mit Hilfe der Bisektionsmethode. Verwenden Sie als Startwerte $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ und brechen Sie die Iteration ab, wenn der Fehler kleiner als 0.05 ist.

Lösung

(i) Zu zeigen: Die Gleichung $x = \cos x$ hat eine eindeutige Lösung.
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x - \cos x$ ist stetig.

$$f(0) = -1,\ f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$$

Damit gilt nach dem Zwischenwertsatz: es existiert ein $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$ mit $f(\xi) = 0$.

$$f^{'}(x) = 1 + \sin x > 0 \text{ für } x \neq 2\pi k + \frac{3}{2}\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Daraus folgt, dass f auf dem Intevall $\left[2\pi k + \frac{3}{2}\pi, 2\pi(k+1) + \frac{3}{2}\pi\right], k \in \mathbb{Z}$, streng monoton steigend ist (Mittelwertsatz).
Damit ist dann f auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigend und die die Nullstelle ξ ist eindeutig.

(ii)

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0,\ b_0 = 1 \\
a_1 &= 0,5,\ b_1 = 1 \\
a_2 &= 0,5,\ b_2 = 0,75 \\
a_3 &= \frac{5}{8},\ b_3 = \frac{3}{4} \\
a_4 &= \frac{11}{16},\ b_4 = \frac{3}{4} \\
a_5 &= \frac{23}{32},\ b_5 = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Die Länge des Intervalls ist nach der 5-ten Iteration $2^{-5} < 0.05$, damit ist auch der absolute Fehler für jedes $x \in [a_5, b_5]$ zur Nullstelle kleiner als 0,05.