Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Andreas Bantle
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Sommersemester 2015

Numerische Analysis - Theorie-Blatt 3
Lösung

(Abgabe am 26.05.2015 **vor** der Übung!)

Hinweise:
Siehe Theorie-Blatt 1/2.

Aufgabe 5 *(Interpolation, Divided Differences, LaTeX)* (6 Punkte)

Let $x_0, \dots x_n \in \mathbb{R}$. Show by induction over n:
The divided differences of the product $f(x) = g(x)h(x)$ can be computed by

$$[x_0, \dots, x_n]f = \sum_{k=0}^{n} [x_0, \dots, x_k]g\ [x_k, \dots, x_n]h.$$

(Hint: Use Leibnitz's rule).
Lösung

1. Fall $x_0 = \dots = x_n = x$:

$$[x_0, \dots, x_n]f = \frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} g^{(k)}(x)h^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(x)}{k!}\frac{h^{(n-k)}(x)}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n}[x_0, \dots, x_k]g\ [x_k, \dots, x_n]h$$

2. Fall $x_n > x_0$:
Induktion nach n:
$n = 0 : [x_0]f = f(x_0) = g(x_0)h(x_0) = [x_0]g\ [x_0]h$
$n - 1 \to n$

$$\begin{aligned}
(x_0 - x_n)[x_0, \dots, x_n]f &= [x_0, \dots, x_{n-1}]f - [x_1, \dots, x_n]f \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}[x_0, \dots, x_k]g\ [x_k, \dots, x_{n-1}]h - \sum_{k=1}^{n}[x_1, \dots, x_k]g\ [x_k, \dots, x_n]h \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}[x_0, \dots, x_k]g\ ([x_k, \dots, x_{n-1}]h - [x_{k+1}, \dots, x_n]h) + \\
&\quad \sum_{k=1}^{n}([x_0\ \dots, x_{k-1}]g - [x_1, \dots, x_k]g)[x_k, \dots, x_n]h \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}[x_0, \dots, x_k]g(x_k - x_n)[x_k, \dots, x_n]h + \sum_{k=1}^{n}(x_0 - x_k)[x_0, \dots, x_k]g\ [x_k, \dots, x_n]h \\
&= \sum_{k=1}^{n}[x_0, \dots, x_{k-1}]g\ (x_{k-1} - x_n)[x_{k-1}, \dots, x_n]h + (x_0 - x_k)[x_0, \dots, x_k]g[x_k, \dots, x_n]h \\
&= (x_0 - x_n)\sum_{k=0}^{n}[x_0, \dots, x_k]g\ [x_k, \dots, x_n]h
\end{aligned}$$

(Die letzte Gleichheit erhält man, wenn man beide Summen einfach zusammenfasst - die meisten Terme kürzen sich!)

Aufgabe 6 (6+3+3 Punkte)

(i) Berechnen Sie das Interpolationspolynom $P \in \mathbb{P}_3$ in der Darstellung von Lagrange und mittels dividierter Differenzen in der Darstellung von Newton für die Punkte

x_i	-1	1	2	3
y_i	3	1	-2	0

(ii) Berechnen Sie den Wert $P(\frac{3}{2})$ mit Hilfe des Algorithmus von Aitken und Neville.

(iii) Berechnen Sie mit Hilfe dividierter Differenzen das Polynom P bezüglich der Newton-Basis vom kleinsten Grad mit den Eigenschaften $P(1) = -2$, $P'(1) = -2$, $P''(1) = 0$, $P(2) = -3$ und $P'(2) = 1$.

Lösung

(i) Per Lagrange erhält man:

$$\begin{aligned}
P(x) &= 3\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1-1)(-1-2)(-1-3)} + 1\frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(1+1)(1-2)(1-3)} \\
&\quad - 2\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(2+1)(2-1)(2-3)} + 0\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(3+1)(3-1)(3-2)} \\
&= -\frac{1}{8}(x-1)(x-2)(x-3) + \frac{1}{4}(x+1)(x-2)(x-3) + \frac{2}{3}(x+1)(x-1)(x-3) \\
&= \frac{17}{4} + \frac{19}{24}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{43}{24}x
\end{aligned}$$

Man erhält das Polynom

$$p(x) = 3 - 1(x+1) - \frac{2}{3}\cdot(x+1)(x-1) + \frac{19}{24}\cdot(x+1)(x-1)(x-2)$$

mittels dividierter Differenzen:

$$\begin{array}{r|lllllll}
-1 & [-1]f = 3 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
1 & [1]f = 1 & \rightarrow & [-1,1]f = \frac{1-3}{1-(-1)} = -1 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & \\
2 & [2]f = -2 & \rightarrow & [1,2]f = \frac{-2-1}{2-1} = -3 & \rightarrow & [-1,1,2]f = \frac{-3-(-1)}{2-(-1)} = -\frac{2}{3} & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
3 & [3]f = 0 & \rightarrow & [2,3]f = \frac{0+2}{3-2} = 2 & \rightarrow & [1,2,3]f = \frac{2-(-3)}{3-1} = \frac{5}{2} & \rightarrow & [-1,1,2,3]f = \frac{5/2+2/3}{3-(-1)} = \frac{19}{24}
\end{array}$$

(ii) Aitken-Neville liefert an der Stelle $\frac{3}{2}$ den Wert $P(\frac{3}{2}) = -\frac{53}{64}$.

$$\begin{array}{r|lllllll}
-1 & 3 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
1 & 1 & \rightarrow & 1 + \frac{1-3/2}{+1-(-1)}(1-3) = 1/2 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & \\
2 & -2 & \rightarrow & -2 + \frac{2-3/2}{2-1}(1+2) = -1/2 & \rightarrow & -\frac{1}{2} + \frac{2-3/2}{2+1}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})) = -\frac{1}{3} & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
3 & 0 & \rightarrow & 0 + \frac{3-3/2}{3-2}(-2-0) = -3 & \rightarrow & -3 + \frac{3-3/2}{3-1}(-\frac{1}{2} + 3) = -\frac{9}{8} & \rightarrow & -\frac{9}{8} + \frac{3-3/2}{3+1}(-\frac{1}{3} + \frac{9}{8}) = -\frac{53}{64}
\end{array}$$

(iii) Mit Hilfe der dividierten Differenzen erhält man

$$p(x) = -2 - 2(x-1) + (x-1)^3$$

$$\begin{array}{r|lllllllll}
1 & [1]f = -2 & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & & & \\
1 & [1]f = -2 & \rightarrow & [1,1]f = -2 & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & & & \\
1 & [1]f = -2 & \rightarrow & [1,1]f = -2 & \rightarrow & [1,1,1]f = 0 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
2 & [2]f = -3 & \rightarrow & [1,2]f = -1 & \rightarrow & [1,1,2]f = 1 & \rightarrow & [1,1,1,2]f = 1 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
2 & [2]f = -3 & \rightarrow & [2,2]f = 1 & \rightarrow & [1,2,2]f = 2 & \rightarrow & [1,1,2,2]f = 1 & \rightarrow & [1,1,1,2,2]f = 0
\end{array}$$

Aufgabe 7 *(Tschebyscheff Polynome)* (3+3+3+3 Punkte)

Die Tschebyscheff Polynome sind definiert durch

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad n \in \mathbb{N}_0,\ x \in [-1, 1].$$

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

(i) Es gilt für $n \geq 2$, $T_n(x) = 2x\, T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$.

(ii) T_n hat die Nullstellen $x_k^{(n)} = \cos(\frac{2k-1}{2n}\pi)$.

(iii) Der führende Koeffizient von T_n ist $a_n = 2^{n-1}$.

(iv) $T_n \in \mathbb{P}_n$.

Lösung:

(i) Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ und $x \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned}
2xT_k(x) - T_{k-1}(x) &= 2x \cos(k \arccos(x)) - \cos((k-1) \arccos(x)) \\
&= \cos(\arccos(x)) \cos(k \arccos(x)) + x \cos(k \arccos(x)) - \cos((k-1) \arccos(x)) \\
&= \cos((k+1) \arccos(x)) + \sin(\arccos(x)) \sin(k \arccos(x)) + x \cos(k \arccos(x)) \\
&\quad - \cos(k \arccos(x)) \cos(\arccos(x)) + \sin(-\arccos(x)) \sin(k \arccos(x)) \\
&= \cos((k+1) \arccos(x)) + \sin(\arccos(x)) \sin(k \arccos(x)) + x \cos(k \arccos(x)) \\
&\quad - \cos(k \arccos(x))x - \sin(\arccos(x)) \sin(k \arccos(x)) \\
&= \cos((k+1) \arccos(x)) = T_{k+1}(x)
\end{aligned}$$

(ii) Berechnung der Nullstellen

$$\begin{aligned}
T_n(x) = 0 \Leftrightarrow \quad & n \arccos(x) = \frac{1}{2}(2k-1)\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow \quad & \arccos(x) = \frac{2k-1}{2n}\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow \quad & x = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Da die Tschebyscheff Polynome nur auf $[-1, 1]$ definiert sind, erhalten wir

$$x = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad , \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

(iii) Induktion über $n \in \mathbb{N}$ (wir verwenden Teil (i) und (iv)):
$n = 1$: $T_1(x) = x = 2^0 x$
$n-1 \to n$: $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) = 2x(2^{n-2}x^{n-1} + \mathcal{O}(x^{n-2})) + \mathcal{O}(x^{n-2}) = 2^{n-1}x^n + \mathcal{O}(x^{n-1})$.

(iv) Induktion über n:
$n = 1$: $P_1 = x \in \mathbb{P}_1$
$n-1 \to n$: $T_n = 2x \underbrace{T_{n-1}(x)}_{\in \mathbb{P}_{n-1}} - \underbrace{T_{n-2}(x)}_{\in \mathbb{P}_{n-2}} \in \mathbb{P}_n$