Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Andreas Bantle
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Sommersemester 2015

Numerische Analysis - Matlab-Blatt 3

(Besprechung in den MATLAB-Tutorien in KW 21/22)

Hinweise:
Siehe MATLAB-Blatt 1/2.

Aufgabe 4 *(Horner's Scheme)* (10+5 Punkte)

(i) Write a MATLAB function

```
[fx,dfx] = hornerNewton(a,x,t),
```

which evaluates the polynomial

$$\begin{aligned} p(t) &= a_0 + a_1(t-x_0) + a_2(t-x_0)(t-x_1) + ... + a_{n+1}(t-x_0)(t-x_1)\cdot ... \cdot (t-x_n) \\ &= a_0 + (t-x_0)\big(a_1 + (t-x_1)(a_2 + \ldots (a_n + (t-x_n)a_{n+1}) \ldots \big) \end{aligned}$$

in Newton representation and its derivative with the Horner scheme. The input parameters are the coefficient vector `a` $:= (a_0, ..., a_{n+1})$, the interpolation points `x` $:= (x_0, ..., x_n)$, and the evaluation points `t`.

(ii) Write a script `testHorner.m`, which evaluates the polynomial

$$p(t) = 2 + (t-1) + 3(t-1)(t+1) - 4(t-1)(t+1)(t-2)$$

and its derivative $p'(t)$ at $t = 3$ and $t = 4$ with the function `hornerNewton.m`. Compare the results with the exact values.

Aufgabe 5 *(Wahl der Interpolationsknoten)* (5+10 Punkte)

Wir wollen mit dieser Aufgabe den Einfluss der Wahl der Interpolationsknoten auf die Güte der Approximation einer Funktion durch ein Interpolationspolynom betrachten.

(i) Schreiben Sie eine Funktion

```
c = coeffNewton(x,fx),
```

die zu den Stützstellen `x =` $(x_0, ..., x_n)$ und den Funktionswerten `fx =` $(f(x_0), ..., f(x_n))$ die Koeffizienten des Newton'sches Interpolationpolynoms mittels dividierte Differenzen berechnet und im Vektor `c` zurückliefert.

(ii) Schreiben Sie ein Skript `main.m`, welches die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ auf dem Intervall $[-3, 3]$ interpoliert. Verwenden Sie hierzu verschiedene Typen von Stützstellen:

- äquidistante Stützstellen
- Nullstellen der Tschebyscheff-Polynome

$$x_k = 3 \cdot \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, ..., n.$$

- Nullstellen der Legendre Polynome
  (Verwenden Sie hierzu die MATLAB Funktion `x = rootsLegendre(n)`, welches die Nullstellen $x_1, ..., x_n$ berechnet und auf der Homepage zum Download bereit steht.)

Sortieren Sie anschließend die Nullstellen nach der Leja-Sortierung (Aufruf: `x = leja(x)`).
Zeichnen Sie das Interpolationspolynom $P_n[f]$ ($n \in \{10, 30, 1000\}$) für alle Typen von Stützstellen sowie die exakte Funktion f in ein Schaubild (Verwenden Sie hierzu die Funktionen `hornerNewton.m` und `coeffNewton.m`).
Achten Sie auf die Achsenbeschriftungen und fügen Sie eine Legende ein.
Was fällt Ihnen auf?