Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Andreas Bantle
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Sommersemester 2015

Numerische Analysis - Matlab-Blatt 5

(Besprechung in den Matlab-Tutorien in KW 25/26)

Hinweise:
Siehe Matlab-Blatt 1/2.

Aufgabe 8 *(Newton-Cotes Formeln)* (7+5 Punkte)
Die klassische Newton-Cotes-Formel bei einer äquidistanten Knotenwahl $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n = b$ lautet

$$\hat{I}_n(f) = (b-a)\sum_{k=1}^{n} \omega_k f(x_k) \left(\approx \int_a^b f(x)\,dx \right).$$

(i) Schreiben Sie eine Funktion

```
I = newtonCotes(f,a,b,n,method)
```

die das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mit Hilfe der summierten Mittelpunktsregel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} h_k f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) \qquad (h_k := x_k - x_{k-1})$$

bzw. der summierten Trapezregel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} h_k \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \qquad (h_k := x_k - x_{k-1})$$

numerisch berechnet. Als Eingabeparameter erhält die Funktion

- das *function handle* `f`
- die Intervallgrenzen `a`,`b`
- die Anzahl der Teilintervalle `n`
- einen String `method`, der angibt ob die summierte Mittelpunktsregel (`'Mittelpunkt'`) oder die summierte Trapezregel (`'Trapez'`) verwendet werden soll.

Verwenden Sie zur Berechnung äquidistante Teilintervalle der Schrittweite $h = (b-a)/n$.

(ii) Schreiben Sie ein Testskript `testNewtonCotes.m`, welches die Integrale

$$\int_{-2}^{2} e^x + x^3 + \frac{1}{1+x^4}\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_{-10}^{10} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

numerisch berechnet. Plotten Sie jeweils den Fehler für $n = 2, 2^2, ..., 2^{14}$ Teilintervalle zur "exakten" Lösung, welche Sie mit der Matlab-Funktion `integral` berechnen können.

Aufgabe 9 *(Adaptive Quadratur)* (3+5+5+5 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir Integrale der Form

$$\int_0^1 x^\alpha\,dx, \quad \alpha \in (0,1).$$

Da der Integrand stetig, aber nicht stetig differenzierbar auf $[0,1]$ ist, erhalten wir mit der summierten Mittelpunktsregel bzgl. äquidistanten Teilintervalle der Länge h nicht mehr die optimale Konvergenz $\mathcal{O}(h^2)$.

(i) Bestimmen Sie numerisch die Konvergenzrate des Fehlers für die summierte Mittelpunktsformel zu äquidistanten Intervallen für verschiedene Werte von $\alpha \in (0,1)$. Welche Vermutung für die Konvergenzrate können Sie daraus für allgemeines $\alpha \in (0,1)$ ableiten?

Um die optimale Konvergenz des Fehlers $\mathcal{O}(h^2)$ auch für Integranden zu erreichen, die keine $\mathcal{C}^2$-Regularität besitzen, führen wir ein graduiertes Gitter für die Teilintervalle ein:

$$x_i = \left(\frac{i}{n}\right)^\beta, \quad i = 0, ..., n, \quad \beta > 0.$$

Bzgl. dieser graduierten Knoten x_i approximieren wir das Integral dann durch eine "modifizierteßummierte Mittelpunktsformel.

(ii) Zunächst Untersuchen wir die Abhängigkeit des Quadraturfehlers von β. Schreiben Sie dazu eine Skript `adapQuad.m`, welches zu $\alpha \in \{1/3, 1/2, 7/8\}$ und $n = 1024$ den Quadraturfehler der summierten Mittelpunktsformel bzgl. der graduierten Knoten in Abhängigkeit von $\beta \in [1,5]$ plottet. Zeichnen Sie dabei außerdem auch das diskrete Minimum der Funktion ein.

(iii) Um für jedes α ein optimales β zu finden, soll nun die Abhängigkeit $\beta(\alpha)$ bestimmt werden. Dabei wählt man folgenden Ansatz

$$\beta_{opt}(\alpha) = 3 \cdot (1+\alpha)^{-k} \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Schreiben Sie ein Skript `getOptBeta.m`, welches für $n = 1024$ und $\alpha \in [0.1, 0.99]$ jeweils das optimale $\beta_{\min}(\alpha) > 0$ numerisch ermittelt. Plotten Sie $\beta_{\min}(\alpha)$ über $1+\alpha$ in einer doppelt logarithmischer Skala. Bestimmen Sie außerdem den Wert von $k \in \mathbb{N}$, für den die Schranke $\beta_{opt}(\alpha)$ eine gute Näherung an $\beta_{\min}(\alpha)$ liefert. (x-Achse: $1+\alpha$, y-Achse: β_{min} bzw. β_{opt}).

(iv) Schreiben Sie ein Skript `getConvRate.m`, welches zu $\alpha = 1/2$ den Quadraturfehler für die äquidistanten Teilintervalle und die graduierten Teilintervalle mit dem in (iii) gewonnenen Wert für β_{opt} über $n = 2, 2^2, ..., 2^{13}$ plottet. Verwenden Sie eine doppelt logarithmische Skala. Welche Konvergenzraten ergeben sich?