Lernziele

In diesem Praktikum sollen Sie üben und lernen:

- Interpolieren eines Kreises
 - Mehrdimensionale Interpolation mittels zweidimensionalen Lagrange Faktoren
-
-

Bevor Sie mit den Praktikumsaufgaben beginnen, laden Sie die Datei session3.zip von der Vorlesungshomepage herunter und entpacken Sie diese in einem eigenen Ordner.

Praktikumsaufgabe 13 - Interpolation eines Kreises

Punkte in $\mathbb{R}^2$ können interpoliert werden, indem man eine Polynominterpolation der beiden Komponenten durchführt.

Hier soll nun der Einheitskreis durch $s = (s_1, s_2) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ interpoliert werden.

- (i) Gegeben sei zunächst $s(0) = s(1) = (1, 0)$, $s(\frac{1}{4}) = (0, 1)$, $s(\frac{1}{2}) = (-1, 0)$, $s(\frac{3}{4}) = (0, -1)$. Weshalb kann man bei diesen Interpolationsbedingungen noch keine „kreisähnliche“ Kurve erwarten? Was müsste man noch fordern?
- (ii) Zu den Voraussetzungen aus (i) sei noch $s'_1(0) = s'_1(1) = 0$ und $s'_2(\frac{1}{4}) = s'_2(\frac{3}{4}) = 0$ gegeben. Weshalb sind diese Voraussetzungen sinnvoll? Warum wird nicht zusätzlich $s'_1(\frac{1}{2}) = 0$ gefordert?
- (iii) Berechnen Sie in einem Skript `circle_interpol` die Newton-Basis-Koeffizienten der Polynome s_1 und s_2 , die durch die Hermite-Interpolation aus den Bedingungen (i) und (ii) hervorgehen. Ihnen steht dabei die Funktion `hermite` zur Verfügung.
- (iv) Plotten Sie die Kurve. Zur Auswertung eines Polynoms in Newton-Basis verwenden Sie das Horner-Schema: Die Funktion `horner`

```
function y=horner(t,c,x)
```

```

y=ones(size(t))*c(end);
for i=length(x)-1:-1:1
    y=c(i)+(t-x(i)).*y;
end
```

berechnet

$$p(t) = c_0 + c_1(t - x_0) + c_2(t - x_0)(t - x_1) + \dots + c_n(t - x_0) \cdots (t - x_{n-1}),$$

wobei c dem Vektor $(c_0, \dots, c_n)^T$ und x dem Vektor $(x_0, \dots, x_n)$ entspricht.

- (v) Plotten Sie zum Vergleich den Einheitskreis.
- (vi) (fakultativ!) Berechnen Sie den maximalen Abstand von der Kurve zum Kreis.
- (vii) (fakultativ!) Verwenden Sie nun als Stützstellen anstatt $t = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1)$ allgemeiner $t = (0, a, \frac{1}{2}, 1 - a, 1)$. Zu welchem a approximiert die resultierende Kurve den Einheitskreis am Besten.

Praktikumsaufgabe 14 - Interpolation von Flächen

Wir betrachten nun die Interpolation auf einem zweidimensionalen Gebiet. Es soll zu einer Matrix $F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (n+1)}$ ein Polynom $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$p(s, t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} s^i t^j$$

gefunden werden, sodass $p(x_k, y_\ell) = f_{k,\ell}$ für vorgegebenes $x = (x_0, \dots, x_m)^T$ und $y = (y_0, \dots, y_n)^T$ gilt.

(i) Betrachten wir zunächst die Lagrange-Polynome

$$L_k^x(s) := \prod_{i \neq k} \frac{s - x_i}{x_k - x_i}.$$

Die Funktion `lagrange_pol` gibt zu $s = (s_0, s_1, \dots, s_r)^T$ und $x = (x_0, \dots, x_m)^T$ eine Matrix $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (r+1)}$ mit $b_{ij} = L_i^x(s_j)$ aus. Versuchen Sie den Code zu verstehen und versuchen Sie das Ergebnis von

```
lagrange_pol(linspace(-1,1,5)', linspace(-1,1,5)')
```

nachzuvollziehen.

(ii) Sei nun der Interpolant zu den Stützstellen (x_i, y_j) und den Stützwerten F mit Hilfe der zweidimensionalen Lagrange-Faktoren durch

$$p(s, t) := \sum_{k=0}^m \sum_{\ell=0}^n f_{k,\ell} L_k^x(s) L_\ell^y(t)$$

definiert. Machen Sie sich klar, dass

$$p(x_k, y_\ell) = f_{k,\ell}$$

gilt.

(iii) Realisieren Sie diese Interpolation, indem Sie `runLagrange` vervollständigen.

(iv) Bei einer weiteren Interpolationsvariante geht man von der Darstellung

$$p(s, t) = q_0(t) + q_1(t)(s - x_0) + \dots + q_m(t)(s - x_0) \cdots (s - x_{m-1})$$

aus. Da $p(s, y_j)$ in Abhängigkeit von s ein Polynom ist, welches die Punkte $(x_0, f_{0,j}), \dots, (x_m, f_{m,j})$ interpoliert, kann man die Newton-Basis-Koeffizienten $q_i(y_j)$ berechnen. Diese sind dann bei laufendem j als Interpolationsbedingungen des Polynoms q_i zu verstehen. Versuchen Sie die Realisierung dieses Algorithmus in `run2D` nachzuvollziehen und führen Sie dieses Skript aus.

(v) Vergleichen Sie beide Ergebnisse aus (iii) und (iv), indem Sie die maximalen Abweichung der beiden Interpolanten berechnen.