Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Attila Klimmek
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Übungsblatt 8

(Besprechung: Di. 20.06.2017)

Aufgabe 1 *(Nichtlineares Dirichlet-Problem)* (20)

Sei $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ stetig differenzierbar. Zum Lösen der nichtlinearen Gleichung

$$F(\mathbf{x}) = 0$$

verwenden wir das Newton-Verfahren

$$DF(x^k)s^k = -F(x^k), \qquad x^{k+1} = x^k + s^k, \qquad k = 0, 1, \dots$$

Hierbei ist $DF(\cdot)$ die Jacobi-Matrix von F und $x_0 \in \mathbb{R}^N$ beliebig gewählt.

Sei $\Omega = (0,1)^2$ mit Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Wir betrachten das nichtlineare Problem: Suche u mit

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\ A(\nabla u) = f & \text{in } \Omega, \\ u|_\Gamma = 0. \end{cases}$$

Die Nichtlinearität $A(\cdot)$ sei von der Form $A(\mathbf{v}) = p(|\mathbf{v}|) \cdot \mathbf{v}$, wobei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt, beschränkt und strikt positiv ist.

Die Gleichung führt auf das diskrete Problem: Finde $\mathbf{u} = \sum_{k=1}^N u_k \varphi_k \in \mathbb{P}^1$ sodass

$$F_j(\mathbf{u}) := \int_\Omega A(\nabla \mathbf{u}) \cdot \nabla\varphi_j \ dx - \int_\Omega f\varphi_j \ dx = 0, \qquad j = 1 \dots, N.$$

Sei $k \in \{1, \dots, N\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u_k}\left(p(|\sum_j u_j \nabla\varphi_j|) \sum_j u_j \nabla\varphi_j \right) \\ &= \left(p(|\sum_j u_j \nabla\varphi_j|) I_{2\times 2} + \frac{p'(|\sum_j u_j \nabla\varphi_j|)}{|\sum_j u_j \nabla\varphi_j|} \left(\sum_j u_j \nabla\varphi_j\right) \left(\sum_j u_j \nabla\varphi_j\right)^T \right) \nabla\varphi_k =: G(\mathbf{u})\nabla\varphi_k \end{aligned}$$

und daher

$$DF_{i,j}(\mathbf{u}) = \int_\Omega G(\mathbf{u})\nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i \ dx.$$

(a) Schreiben Sie eine Funktion, die für ein Dreieck T die lokale Jacobi-Matrix

$$\left(\int_T G(\mathbf{u})\nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i \ dx \right)_{i,j=1,2,3}$$

zurückliefert.

(b) Schreiben Sie zwei Skripte, die das obige nichtlineare Problem jeweils mit mit Newton-Verfahren und der Fixpunktiteration von Blatt 3 löst.

(c) Testen Sie beide Varianten an den Funktionen

$$p_1(|v|) = 2 + \frac{1}{1+|v|} \qquad \text{und} \qquad p_2(|v|) = \arctan(|v|) + \frac{3\pi}{4}.$$

Vergleichen Sie die Ergebnisse bzgl. der Zahl der Iterationen, Konvergenz und Zeitaufwand.