Parallelisierung der Restriktion

Die Parallelisierung hängt maßgeblich von der Nummerierung ab. Gauß-Seidel glättet i.A. besser als Jacobi, welches bessere Parallelisierung erlaubt.

Gauß-Seidel mit Red/Black

Es gilt

$$(1) \qquad u_r^k = D_r^{-1}(-E\,u_b^{k-1} + b_r) \qquad (r \mathrel{\hat=} \text{red})$$

$$(2) \qquad u_b^k = D_b^{-1}(-E^T u_r^k + b_b) \qquad (b \mathrel{\hat=} \text{black})$$

mit E nach der GS-Iterationsvorschrift. Also hat A die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} D & E \\ E^T & D \end{pmatrix}$$

mit $D = \operatorname{diag}(4, \dots, 4)$ und $(D_r = D_b = D)$

$$E := \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1 & \ddots & 0 & 1 & 0\\ 1 & & \ddots & & 1\\ 1 & & & \ddots & 1\\ & \ddots & 0 & & 1\\ & 0 & & & \\ & & & & 1\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix}1 & & 1 & & 0\\ 1 & \ddots & 0 & \ddots & \\ 1 & & & & \\ & & \ddots & & 1\\ & & & & 1\\ 0 & & & 1 & 1\end{matrix}\end{array}\right] \qquad \text{(Übung)},$$

also

$$r_b^k \underset{(\mathrm{Def})}{=} b_b - (Au^k)_b = b_b - E^T u_r^k - D u_b^k$$

$$\underset{(1)}{=} b_b + E^T D^{-1} E\, u_b^{k-1} - E^T D^{-1} b_r - D u_b^k$$

$$\underset{(2)}{=} b_b + E^T D^{-1} E\, u_b^{k-1} - E^T D^{-1} b_r + E^T u_r^k - b_b$$

$$\underset{(1)}{=} E^T D^{-1}(E u_b^{k-1} - b_r) + E^T D^{-1}(-E u_b^{k-1} + b_r) = 0,$$