

## Matlab-Blatt 4

(Abgabe bis spätestens Dienstag, den 20.12.2011, 10:00 Uhr per Mail (s.u).)

### Aufgabe 1 (*Matrix norms, condition numbers and perturbed equation systems*) (8 Punkte)

The 1-norm of a vector  $x \in \mathbb{R}^n$  is defined as

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

This allows to compute the 1-norm of a matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  in the following way (cf. script p. 98):

$$\|A\|_1 := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{jk}|.$$

- Write a function `a = my1Norm(arg)` that computes the 1-norm for matrices **as well as** for vectors, i.e. `my1Norm` should return  $\|x\|_1$  for  $x \in \mathbb{R}^n$  and  $\|A\|_1$  for  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .
- Write a function `kappa = my1Cond(A)` that computes the condition number with respect to the 1-norm for a matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .
- Complete the missing lines 9-15 in the script `main1.m` to compare your functions with the Matlab build-ins `norm(arg,1)`, `cond(A,1)`. Of course, you are **not** allowed to use these functions in (a) and (b)!
- Complete the lines 30-36 in `main1.m` to verify Theorem 3.2.4 by computing the relative error  $\frac{\|x-\tilde{x}\|_1}{\|x\|_1}$  and the corresponding error bound for the perturbed equation system given in lines 20-27.

### Aufgabe 2 (*Estimating condition numbers*) (12 Punkte)

Bei der Berechnung der Konditionszahl  $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$  ist die Berechnung von  $\|A\|$  meistens kein Problem. Für  $\|A^{-1}\|$  benötigt man allerdings die Inverse von  $A$ , was sehr aufwändig ist. In der Praxis benötigt man außerdem oft nur eine Abschätzung für  $\kappa$ . Eine einfache Überlegung führt zu folgender unteren Schranke:

$$Ax = y \implies \|x\| = \|A^{-1}y\| \leq \|A^{-1}\| \|y\| \implies \kappa(A) \geq \|A\| \cdot \frac{\|x\|}{\|y\|} =: \kappa_{est}(A).$$

Dabei geht man zudem üblicherweise davon aus, dass eine Zerlegung von  $A$  schon vorhanden ist, z.B.  $PA = LR$  nach Lösen eines Gleichungssystems.

- Implementieren Sie eine Funktion `est = mySimple1CondEst(A,L,R,P)`, welche den obigen Schätzer  $\kappa_{est}$  für die 1-Norm berechnet. Prinzipiell sind ja sowohl  $x$  als auch  $y$  frei wählbar - verwenden Sie für diesen einfachen Schätzer ein zufällig gewähltes  $y$  der passenden Größe.
- Der Schätzer ist natürlich umso besser, je größer der Quotient  $\frac{\|x\|}{\|y\|}$  ist. Dafür gibt es die folgende Heuristik\*:
  - Berechne  $y$  durch  $A^T y = d$  für ein speziell gewähltes  $d$ , also:
    - $R^T y_1 = d$ ,
    - $L^T y = y_1$ .
  - Berechne  $x$  durch  $Ax = y$ , also:
    - $Lx_1 = y$ ,
    - $Rx = x_1$ .

Die rechte Seite  $d$  in Schritt 1a) wird dabei folgendermaßen gewählt: Beim Vorwärtseinsetzen zur Berechnung von  $Ly_1 = d$  mit linker unterer Dreiecksmatrix  $L$  gilt ja für jede Komponente, dass

$$y_1(i) = \frac{1}{L(i,i)} \cdot (d(i) - \underbrace{L(i,1:i-1) \cdot y_1(1:i-1)}_{=:p(i)}) \quad i = 1, \dots, n.$$

Setze nun  $d(1) = -1$  und

$$d(i) := \begin{cases} -1 & \text{falls } p(i) \geq 0, \\ 1 & \text{falls } p(i) < 0. \end{cases}$$

Schreiben Sie eine Funktion `est = my1CondEst(A,L,R,P)`, welche diesen verbesserten Schätzer berechnet.

- c) Ergänzen Sie im Skript `main2.m` die Zeilen 12, 20 und 27: Berechnen Sie für die zufällige Matrix  $A$  sowohl die exakte Konditionszahl als auch die Schätzungen mit Methode a) bzw. b) und vergleichen Sie die Qualität der Schätzung und die Laufzeiten.

Verwenden Sie dabei für a)-c) Ihre in Aufgabe 1 geschriebenen Funktionen `my1Norm`, `my1Cond`.

\* Diese Heuristik basiert auf der Singulärwertzerlegung von  $A$  und kann z.B. in folgendem Paper nachgelesen werden:

A. K. Cline, C. B. Moler, G. W. Stewart, and J. H. Wilkinson. *An Estimate for the Condition Number of a Matrix*. SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 17, No. 2 (April 1979), pp. 368-375.  
<http://www.jstor.org/stable/2156842>

**Senden Sie alle Dateien (*m*-Files, Plots, Erklärungen) in einer Email mit dem Betreff Num1-BlattM4 an [kristina.steih@uni-ulm.de](mailto:kristina.steih@uni-ulm.de). Bitte alle Dateien in ein zip-File packen, welches die Namen der Studenten enthält, also z.B. M4\_Student1\_Student2.zip. Aus der Email sollte zusätzlich klar hervorgehen, von welchen beiden Studenten die Lösung ist. Bitte schreiben Sie außerdem dazu, in welcher Übungsgruppe (Wochentag und A bzw. B) Sie jeweils sind.**