Prof. Dr. Stefan Funken
Kristina Steih
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Matlab-Blatt 5

(Abgabe bis spätestens Dienstag, den 17.01.2012, 10:00 Uhr per Mail (s.u.).)

Aufgabe 1 *(Richardson-Method)* (7 Punkte)

In this problem we want to determine the optimal parameter ω for the Richardson iteration

$$x_{k+1} = x_k - \omega(Ax_k - b) = (I - \omega A)x_k + \omega b$$

with a numerical experiment. In order to do that, perform the following steps.

(a) Write a function `x = richardson( A, b, x0, omega, N)` which computes `N` steps of the Richardson iteration for the linear system $Ax = b$ using `x0` as initial point and the relaxation parameter `omega`. The output `x` is a vector which contains the solution x_N of the Richardson iteration after `N` steps.

(b) Write a script `main1.m` in which you

(1) initialize the Matrix A, the vector b, and the initial vector x_0 as defined in Problem 2 (c) on exercise sheet T5,

(2) compute the exact solution of the linear system $Ax = b$ using the backslash operator,

(3) initialize `omega` as a vector with 200 values ranging from 0.25 to 0.45,

(4) compute the solution of the Richardson iteration x_{20} after $N = 20$ steps and the error $||x_{20} - x_{ex}||_2$ for each value of `omega` (for the norm you are allowed to use the Matlab function `norm`),

(5) plot the errors over `omega`.

(c) Which is the optimal parameter `omega`? Does that match the theoretical result from Exercise 2 on exercise sheet T5?

Aufgabe 2 *(Jacobi- und Gauss-Seidel-Verfahren)* (10 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen sie das Jacobi- und das Gauss-Seidel-Verfahren vergleichen. Schreiben Sie dazu ein Skript `main2.m`, in dem Sie für eine zufällige, diagonaldominante 1000×1000 - Matrix A und einen zufälligen 1000×1 - Vektor b das Gleichungssystem $Ax = b$ mit beiden Verfahren lösen. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

(1) Initialisieren Sie die Matrix A, den Vektor b und den Startvektor $x0$, der nur Nullen enthält. Achtung: A soll zufällig und diagonaldominant sein.

(2) Berechnen Sie die exakte Lösung x_{ex} mit dem Backslash-Operator.

(3) Führen Sie jeweils 12 Schritte des Jacobi- und Gauss-Seidel-Verfahrens durch. Berechnen Sie für jeden Schritt den Fehler $||x_k - x_{ex}||_2$ (Sie dürfen für die Norm die Matlab-Funktion `norm` verwenden).

(4) Plotten Sie beide Fehler über k in eine Grafik. Wählen Sie die Skalierung der Achsen so, dass näherungsweise Geraden entstehen.

Achten Sie darauf, dass ihre Iterationen effizient ausgeführt werden. Es ist zum Beispiel effizienter, die Iterationsmatrizen für die beiden Verfahren vor der Iteration einmal zu berechnen und nicht in jedem Iterationsschritt neu.
Was lässt sich über das Konvergenzverhalten der beiden Verfahren sagen?

Aufgabe 3 *(Gauss-Seidel-Verfahren)* (8 Punkte)

Beim Gauss-Seidel-Verfahren spielt es ja eine Rolle, in welcher Reihenfolge die Komponenten des Lösungsvektors x korrigiert werden. Betrachtet man z.B. $Ax = b$ mit einer diagonaldominanten Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,3}$, so könnte man auch $P_{13}Ax = P_{13}b$ lösen:

$$(P_{13}A)x = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} = P_{13}b$$

Allerdings ist dann die Matrix nicht mehr diagonaldominant. Führt man jedoch gleichzeitig noch eine Spaltenvertauschung durch, berechnet also

$$(P_{13}AP_{13}^T)\tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} = P_{13}b,$$

so ist die Diagonaldominanz wiederhergestellt und das Gauß-Seidel-Verfahren lässt sich auf jeden Fall wieder anwenden. Nun ist natürlich die Frage, welche Permutation am geeignetsten ist.

Schreiben Sie ein Skript `main3.m`, in welchem

- eine zufällige diagonaldominante Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und ein zufälliger Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ angelegt werden,
- alle möglichen Permutationen P der Matrix A betrachtet werden (*Hinweis:* Verwenden Sie die Matlab-Funktion `perms`) und dafür jeweils
- die Iterationsmatrix C_{GS} für das permutierte System $PAP^T\tilde{x} = Pb$ aufgestellt und
- der Spektralradius von C_{GS} berechnet wird.

Stellen Sie dabei sicher, dass das permutierte System korrekt ist, indem Sie die entsprechende Lösung mit der Lösung des Originalsystems vergleichen.

Geben Sie die Permutationen und die dazugehörigen Spektralradien übersichtlich aus (*Hinweis:* Verwenden Sie `fprintf`, siehe auch die Lösung zu Blatt M2). Kommentieren Sie die Resultate: was fällt Ihnen auf? Wie viele Permutationen muss man tatsächlich miteinander vergleichen, um ein optimales Gauß-Seidel-Verfahren durchführen zu können?

Senden Sie alle Dateien (m-Files, Plots, Erklärungen) in einer Email mit dem Betreff `Num1-BlattM5` an kristina.steih@uni-ulm.de. Bitte alle Dateien in ein zip-File packen, welches die Namen der Studenten enthält, also z.B. `M5_Student1_Student2.zip`. Aus der Email sollte zusätzlich klar hervorgehen, von welchen beiden Studenten die Lösung ist. Bitte schreiben Sie außerdem dazu, in welcher Übungsgruppe (Wochentag und A bzw. B) Sie jeweils sind.