Prof. Dr. Karsten Urban

Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger,
Dipl.-Math. oec. Sebastian Kestler

Institut für Numerische Mathematik
Wintersemester 2012/13

Numerik 1

Blatt 1

(**Abgabe** Mittwoch, 31.10.2012 **vor** den Theorie-Übungen in H2)

Hinweise:

a) Die **Anmeldung** für die Tutorien (im SLC unter der Veranstaltung "Numerik 1") und die Matlab-Übungen (im SLC unter "Numerik 1 (MatLab)") läuft von Freitag, 19.10.2012, 14 Uhr bis Sonntag, 21.10.2012, 18 Uhr. Bei der Anmeldung zu den Matlab-Übungen erfolgt auch die Einteilung in die Gruppen "A" und "B" (s.a. Semesterübersicht auf der Homepage).

b) Abgabe der Übungsblätter nur **zu zweit**. Einzeln abgegebene Blätter werden nicht bewertet.

c) Zulassungskriterien: 50% der Übungspunkte (7 Übungsblätter) und **insgesamt** 4 abgegebene Aufgaben in LaTeX. Auf jedem Blatt wird mind. eine Aufgabe zur Abgabe mit LaTeX angeboten.

c) Aufgaben die auf Englisch gestellt sind, müssen nicht auf Englisch beantwortet werden.

d) Eine kurze Einführung in LaTeX wird noch am Mittwoch, den 24.10. in den Übungen gegeben. Weitere Hinweise, insbesondere zur Installation von LaTeX, finden sich auf der Homepage. Zudem ist LaTeX auf den Linux-Rechnern des kiz installiert.

Aufgabe 1 *(Zahldarstellung, LaTeX-Aufgabe)* (6 Punkte)

Für die Anwendung von Bedeutung sind bei der Zahldarstellung (vgl. Definition 2.1.9) die Basen $b = 10$ (Dezimalzahlen), $b = 2$ (Binärzahlen), $b = 8$ (Oktalzahlen) und $b = 16$ (Hexadezimalzahlen). Bei Hexadezimalzahlen treten Ziffern mit Werten zwischen 0 und 15 auf. Damit alle Ziffern einstellig notiert werden können, werden für die Ziffern mit den Werten 10 bis 15 die Buchstaben A bis F verwendet. Ergänzen Sie folgende Tabelle (geben Sie dabei alle Rechnungen an):

Dezimal	Dual	Oktal	Hexadezimal
27.375			
	10011.011111		
		11.11	
			A.BC

Hinweis: Diese Aufgabe kann als LaTeX-Aufgabe abgegeben werden. Die untere Gaußklammer "$\lfloor\ \rfloor$" können Sie mit "\lfloor" bzw. "\rfloor" erzeugen.

Aufgabe 2 *(Eindeutigkeit der Zahldarstellung)* (3+2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Abbildung

$$\varphi : \{0, 1, \dots, b-1\}^n \to \{0, 1, \dots, b^n - 1\} \quad \text{mit} \quad (a_0, \dots, a_{n-1}) \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} a_k b^k$$

bijektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass jede reelle Zahl von Null verschiedene Zahl unter der Bedingung "$a_k < b - 1$ für unendlich viele $k \leq n$" eine eindeutige b-adische Entwicklung besitzt (siehe Bemerkung 2.1.6).

Aufgabe 3 *(Umwandlung in und Operationen auf Gleitpunkt-Darstellungen)* (2+2+2+2 Punkte)

a) Gegeben seien $a = \frac{7}{8}, b = -\frac{6}{8}, c = \frac{3}{16} \in \mathbb{M}(2,3,2)$. Zeigen Sie, dass gilt: $a = (0.111)_2 \cdot 2^{(00)_2} = (0.111)_2 \cdot 2^0$, $b = -(0.110)_2 \cdot 2^{(00)_2} = -(0.110)_2 \cdot 2^0$ und $c = (0.110)_2 \cdot 2^{-(10)_2} = (0.110)_2 \cdot 2^{-2}$.

b) Zeigen Sie für Operationen $\oplus, \ominus$ auf $\mathbb{M}(2,3,2)$, dass $(a \oplus b) \oplus c = (0.101)_2 \cdot 2^{-1} = \frac{5}{16}$ und dass $a \oplus (b \oplus c) = (0.110)_2 \cdot 2^{-1} = \frac{3}{8}$. Verwenden Sie dazu die Standardrundung. Bestimmen Sie den relativen Fehler beider Ergebnisse.

c) Bestimmen Sie für $a = \frac{3}{5}$ und $b = \frac{4}{7}$ die Darstellungen von a und b in $\mathbb{M}(2,5,3)$ und $\mathbb{M}(2,3,3)$ (da die Zahlen nicht exakt darstellbar sind, muss hier gerundet werden).

d) Berechnen Sie auf beiden Gleitpunkt-Darstellungen $a \ominus b$. Wie groß ist der jeweilige Fehler und wie heißt das beobachtete Phänomen?

Aufgabe 4 *(Umwandlung in b-adische Gleitpunkt-Darstellung)* (4+3 Punkte)

Zu gegebener Basis $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, sei $x \in [b^{-b^n}, b^{b^n - 1})$ in der (eindeutigen) Darstellung

$$x = b^{t \cdot \ell(\mathbf{v})} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} d_j b^{-j}, \quad \ell(\mathbf{v}) := \sum_{j=0}^{n-1} v_j b^j$$

gegeben, wobei wir annehmen, dass $d_j < b - 1$ für unendlich viele j. Wir interessieren uns für die Bestimmung von $t \in \{-1, 1\}$, des n-stelligen Exponenten $\mathbf{v} = (v_0, \ldots, v_{n-1}) \in \{1, \ldots, b-1\}^n$ und der m-stelligen Mantisse $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_m) \in \{1, \ldots, b-1\}^m$ (ohne Runden) mit $d_1 \neq 0$, d.h. für die Darstellung von $fl(x) \in \mathbb{M}(b, m, n)$ (s.a. Definition 2.1.13).

a) Zeigen Sie, dass mittels des Pseudo-Codes in Algorithmus 1 tatsächlich für gegebenes $x \in [b^{-b^n}, b^{b^n - 1})$ die Koeffizienten $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_m)$ berechnet werden.

b) Algorithmus 1 berechnet ebenfalls den Wert für ℓ. Schreiben Sie einen Algorithmus in Pseudo-Code (Englisch ist hier keine Pflicht) der die entsprechenden Koeffizienten $\mathbf{v} = (v_0, \ldots, v_{n-1})$ berechnet und zeigen Sie, dass ihr Algorithmus das richtige Ergebnis liefert.

Algorithm 1 Computation of $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_m)$

if $0 < bx < 1$ **then**
    Find the smallest $k \in \mathbb{N}$ such that $y_1 := b^{k+1}x \geq 1$.
    Set $\ell = \ell(\mathbf{v}) = k$ and $t = -1$.
    for $j = 1, \ldots, m$ **do**
        Compute the smallest $d_j \in \{0, \ldots, b-1\}$ such that $y_j - d_j < 1$.
        Set $y_{j+1} = b(y_j - d_j)$.
    end for
else if $bx \geq 1$ **then**
    Find the smallest $k \in \mathbb{N}_0$ such that $x < b^k$
    Set $\ell = \ell(\mathbf{v}) = k$ and $t = 1$.
    Set $y_1 := bx$.
    for $j = 1, \ldots, m$ **do**
        Compute the smallest $d_j \in \{0, \ldots, b-1\}$ such that $y_j - d_j b^k < b^k$.
        Set $y_{j+1} = b(y_j - d_j b^k)$.
    end for
end if