Prof. Dr. Karsten Urban

Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger,
Dipl.-Math. oec. Sebastian Kestler

Institut für Numerische Mathematik
Wintersemester 2012/13

Numerik 1

Blatt 2

(**Abgabe** Mittwoch, 14.11.2012 **vor** den Theorie-Übungen in H2)

Allgemeiner Hinweis: Falls Sie die Matlab-Übungsgruppe welchseln wollen, um mit Ihrem Wunsch-Übungspartner in einer Gruppe zu sein, finden Sie die Welchselmodalitäten auf der Homepage.

Aufgabe 5 *(Matrixnormen, LaTeX-Aufgabe)* (3+3+3)

Eine Matrixnorm hat die selben Eigenschaften, wie eine Vektornorm (zur Definition und weiteren Eigenschaften von Matrixnormen vgl. Anhang B.2): Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m, n \in \mathbb{N}$

- $||A|| \geq 0$, $||A|| = 0 \iff A = 0$
- for $\lambda \in \mathbb{R}$ there holds $||\lambda A|| = |\lambda| \cdot ||A||$
- $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$.

Eine Matrixnorm $||\cdot||_M$ ist durch eine Vektornorm $||\cdot||_V$ induziert, falls folgendes gilt

$$||A||_M = \sup_{x\neq 0} \frac{||Ax||_V}{||x||_V}$$

.

a) Zeigen Sie, dass die Matrixnorm $||A||_2 := \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$ durch die Euklidische Norm induziert wird.

b) Zeigen Sie $||A^{-1}||_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}(A^T A)}}$.

c) Berechnen Sie die Konditionszahl $\kappa_2(A) := ||A||_2||A^{-1}||_2$ der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6 *(Instabilität, Rundungsfehler und Konditionszahlen)* (2+3+3 Punkte)

Betrachte die folgende Rekursionsformel

$$x_k = \frac{16}{3}x_{k-1} - \frac{5}{3}x_{k-2}, \quad k \geq 2 \tag{*}$$

mit $x_0 = 1$ und $x_1 = 1/3$.

a) Zeigen Sie mittels Induktion, dass die Rekursion die Folge $x_k = (\frac{1}{3})^k$ erzeugt.

b) Führen Sie eine Fehleranalyse durch. Zeigen Sie, wie sich Rundungsfehler in x_{k-2} und x_{k-1} auf x_k auswirken.

Hinweis: Sei ϵ_{k-1} der relative Fehler von x_{k-1} also $\tilde{x}_{k-1} := fl(x_{k-1}) = x_{k-1}(1 + \epsilon_{k-1})$. Wie hängt dann ϵ_k von ϵ_{k-2} und ϵ_{k-1} ab?

c) Die allgemeine Lösung der Rekursionsvorschrift (*) lautet

$$x_k = c_1(x_0, x_1)\left(\frac{1}{3}\right)^k + c_2(x_0, x_1)5^k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Hierbei lassen sich c_1 und c_2 eindeutig aus den Startwerten x_0 und x_1 berechnen. Es sei $x_0 = 1$ fest.

i) Bestimmen Sie $c_1(1, x_1)$ und $c_2(1, x_1)$.

ii) Berechnen Sie die absolute Konditionszahl $\kappa_{abs} = \frac{dx_k}{dx_1}$ und die relative Konditionszahl κ_{rel} von x_k bezüglich x_1 bei $x_1 = 1/3$. Verwenden Sie hierbei dass

$$\kappa_{rel} = \kappa_{abs}\frac{x_1}{x_k}$$

gilt.

Aufgabe 7 *(Kondition, Stabilität)* (1+2+2+1 Punkte)

Gegeben Sei das mathematische Problem:

Berechne das Resultat z für $x = 30$ aus der Formel

$$z = f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}).$$

a) Berechnen Sie die relative Konditionszahl von f (für $x = 30$). Ist das Problem gut konditioniert?

Zur Berechnung von z soll nun folgender Algorithmus verwendet werden:

1. Berechne $a = x^2$
2. Berechne $a = a - 1$
3. Berechne $a = \sqrt{a}$
4. Berechne $a = x - a$
5. $z = \ln(a)$

b) Berechnen Sie den relativen Ausgabefehler $\frac{\tilde{z}-z}{z}$, für die exakte Eingabe $x = 30$ und die gestörte Eingabe $x = 30.05$ mit Hilfe des obigen Algorithmus. Verwenden Sie hierzu "exakte" Rechnung, d.h. verwenden Sie in jedem Schritt das Ergebnis, das der Taschenrechner bzw. der Computer liefert.

c) Berechnen Sie nun für $x = 30$ die Lösung z_1 mit obigem Algorithmus. Verwenden Sie hierbei nur 4 Stellen an Genauigkeit, d.h. in jedem Schritt muss das Ergebnis gerundet werden. Wie grofl ist der relative Fehler zwischen z und z_1?

d) Beschreiben und erklären Sie die Beobachtungen, die Sie in Teil (b) und (c) gemacht haben.

Aufgabe 8 *(Aufwand)* (3+3+3 Punkte)

Berechnen Sie den Aufwand für folgende Operationen. Geben Sie dabei sowohl die genaue Anzahl der Rechenoperationen als auch für die Teile b) und c) den Aufwand in der $\mathcal{O}$-Notation an.

a) $A \cdot B$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}, B \in \mathbb{R}^{m\times k}$.

b) $R \cdot S$, wobei $R, S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rechte obere Dreiecksmatrizen sind.

c) $A \cdot x$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Tridiagonalmatrix und $x \in \mathbb{R}^n$ sind.