Prof. Dr. Karsten Urban

Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger,
Dipl.-Math. oec. Sebastian Kestler

Institut für Numerische Mathematik
Wintersemester 2012/13

ulm university universität ulm

Numerik 1

Blatt 3

(**Abgabe** Mittwoch, 28.11.2012 **vor** den Theorie-Übungen in H2)

Allgemeine Hinweise:

- Bitte beachten Sie, dass für die Zulassung zur Klausur mindestens vier der gekennzeichneten Aufgaben in LaTeX gesetzt und ausgedruckt abgegeben werden müssen.
- Sei können die Matlab-Funktion `mylu.m` von Seite 43 des Skripts verwenden um Ihre Ergebnisse der Aufgaben 9 und 10 zu verifizieren.

Aufgabe 9 *(Berechnung der LR-Zerlegung, LaTeX-Aufgabe)* (4 Punkte)
Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 7 \\ -12 & 5 & -12 \\ 18 & 0 & 22 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie damit durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen das Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (\frac{41}{12}, -\frac{22}{3}, \frac{29}{2})^\top$. Verwenden Sie bei der Rechnung ausschließlich Brüche und keine Dezimalzahlen und geben Sie Zwischenschritte an.

Aufgabe 10 *(Berechnung der LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung)* (8 Punkte)
Bestimmen Sie mittels Spaltenpivotisierung (siehe Algorithmus 3.4.1) die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

und geben Sie die Matrizen L, R und P mit $PA = LR$ an (Hinweis: Beispiele 3.4.9 und 3.4.11 im Skript). Verwenden Sie bei der Rechnung ausschließlich Brüche und keine Dezimalzahlen. Geben Sie Zwischenschritte an.

Aufgabe 11 *(Beweis von Satz 3.3.3)* (4+3+3 Punkte)

a) Seien $L^{(1)} = (l_{ik}^{(1)})_{i,k=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $L^{(2)} = (l_{kj}^{(2)})_{k,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei untere Dreiecksmatrizen, d.h., $l_{ik}^{(1)} = 0$ für $i < k$ und $l_{kj}^{(2)} = 0$ für $k < j$. Zeigen Sie, dass das Produkt zweier unterer Dreiecksmatrizen wieder eine untere Dreiecksmatrix ist.

b) Zeigen Sie, dass die Inverse einer regulären unteren Dreiecksmatrix auch eine untere Dreiecksmatrix ist.

c) Die Ergebnisse aus a) und b) lassen sich analog auch für obere Dreiecksmatrizen zeigen. D.h., das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen ist wiederum eine obere Dreiecksmatrix und die Inverse einer regulären oberen Dreiecksmatrix ist wiederum eine obere Dreiecksmatrix. Des Weiteren kann man zeigen, dass die Inverse einer unteren unipotenten Dreiecksmatrix wiederum eine

unipotente untere Dreiecksmatrix ist.
Nutzen Sie diese Ergebnisse, um zu zeigen, dass wenn die LR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert, wobei L unipotent ist, diese eindeutig ist. (Tipp: Verwendet man den Ansatz $A = LR = \hat{L}\hat{R}$, dann gilt $\hat{L}^{-1}L = \hat{R}R^{-1}$. Was gilt nun für $\hat{L}^{-1}L = \hat{R}R^{-1}$?)

Aufgabe 12 *(Cholesky-Zerlegung)* (4+2+2 Punkte)

Let $n \in \mathbb{N}$ and $n \geq 2$. For a given vector $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ with $\|a\|_2 < 1$, we consider the linear system

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a^\top \\ a & I \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}, \tag{1}$$

where $I \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ is the identity matrix in $\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ and $b \in R$, $c \in \mathbb{R}^{n-1}$ are also given. Our goal is to compute $u \in \mathbb{R}$ and $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ via the Cholesky decomposition.

a) For $a^\top = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, determine the Cholesky decomposition of A **using the algorithm** given on page 49 of the lecture notes. Use only fractions and square roots and indicate **all** steps that are necessary for your computations. (Hint: The outcome of the Cholesky decomposition is given below.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{33}} & \sqrt{\frac{10}{11}} \end{pmatrix}$$

b) We consider the following rearrangement of the linear system from (1):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I & a \\ a^\top & 1 \end{pmatrix}}_{=:\hat{A}} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Show that the Cholesky decomposition of $\hat{A}$ is given by $\hat{A} = \hat{L}\hat{L}^\top$ with

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ a^\top & \sqrt{1 - a^\top a} \end{pmatrix}.$$

c) For general admissible $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ (i.e., $\|a\|_2 < 1$), which of the linear systems (1) or (2) can be solved more efficiently for $n \gg 1$ by using the Cholesky decomposition? Justify your answer.