Prof. Dr. Karsten Urban

Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger,
Dipl.-Math. oec. Sebastian Kestler

Institut für Numerische Mathematik
Wintersemester 2012/13

Numerik 1

Blatt 4

(**Abgabe** Mittwoch, 12.12.2012 **vor** den Theorie-Übungen in H2)

Hinweis: Die Matlab-Übungen (Gruppe A) am Freitag, den 7.12.2012, findet **ausnahmsweise** im PC-Pool der Helmholtzstr. 18 statt (und nicht im kiz PC-Pool 10).

Aufgabe 13 *(Richardson-Iteration, LaTeX-Aufgabe)* (4+4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix und sei $b \in \mathbb{R}^n$.

a) $e^{(k)} := x^{(k)} - x$ bezeichne den Fehlervektor nach der k-ten Iteration des Richardson-Verfahrens, also
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega(Ax^{(k)} - b).$$
Zeigen Sie, dass die folgende Fehlerabschätzung gilt:
$$||e^{(k)}||_2 \leq \varrho(I-\omega A)^k ||e^{(0)}||_2.$$
Hierbei bezeichnet $\varrho(B)$ den Spektralradius der Matrix B.

b) Falls die Eigenwerte λ von A die Ungleichungen $0 < c \leq \lambda \leq C$ erfüllen, wie ist dann der Parameter ω zu wählen, damit die Richardson-Iteration möglichst schnell (im Sinne der euklidischen Norm) gegen die Lösung von $Ax = b$ konvergiert? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 14 *(Zerlegarkeit von Matrizen)* (4+3 Punkte)

a) Zeigen Sie die Aussage aus Bemerkung 4.3.5: Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bestehe der gerichtete Graph $G(A)$ aus n Knoten $K_1, \dots, K_n$ und es gebe eine gerichtete Kante $K_i \to K_j$ in $G(A)$ genau dann, wenn $a_{ij} \neq 0$. Die Matrix A ist genau dann unzerlegbar, wenn der Graph $G(A)$ zusammenhängend ist, d.h. es gibt für jedes Knotenpaar (K_i, K_j) einen gerichteten Weg von K_i nach K_j.

b) Prüfen Sie zunächst mit Hilfe des Satzes 4.3.7, ob das Jakobi-Verfahren für die gegebenen Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -4 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
gleich zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ geeignet ist. Kann der Satz nicht weiter helfen, so versuchen Sie die Konvergenz auf andere Art und Weise zu bestätigen bzw. zu widerlegen.

Aufgabe 15 *(Einschritt- und Gesamtschrittverfahren: Jakobi und Gauß-Seidel)* (4+4+3+2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Gauß-Seidel-Methode (Einschrittverfahren) für alle linearen Gleichungssysteme mit symmetrisch, positiv definiter Koeffizienten-Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ konvergiert.

   Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Gleichung

$$(1-\lambda)v^T D v = (1+\lambda)v^T A v$$

   für alle Eigenwerte λ von $-(L+D)^{-1}R$ mit dazugehörigem Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^n$ gilt.

b) Gesamtschrittverfahren, wie das Jakobi-Verfahren, konvergieren nicht für jede symmetrisch, positive definite Matrix A. Betrachten Sie hierzu die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

   Für welche Werte von a ist das Jakobi-Verfahren konvergent? Hinweis: Bestimmen Sie zunächst mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung a so, dass A positiv definit ist. Berechnen Sie anschließend die Eigenwerte der Iterationsmatrix C_J und argumentieren Sie mit einem entsprechenden Satz aus der Vorlesung.

c) Geben Sie für das Jakobi und das Gauß-Seidel-Verfahren jeweils eine komponentenweise Darstellung an (mit Erklärung).

c) Moderne Rechner haben z.T. mehrere Prozessoren. Solchen Parallelrechner ermöglichen es mehrere Prozesse gleichzeitig laufen zu lassen, indem diese auf die verschieden Hauptprozessoren verteilt werden.

   Bei der Parallelisierung versucht man, Computer-Berechnungen wie z.B. einen Iterationsschritt eines Iterations-Verfahrens auf mehrere Prozessoren so aufzuteilen, dass die einzelnen Arbeitsschritte dort gleichzeitig und möglichst unabhängig voneinander durchgeführt werden können. Parallelisierung kann u. U. die Laufzeit verbessern. Dies hängt allerdings davon ab, ob sich eine Berechnungsroutine, in unserem Fall ein Iterations-Verfahren, gut in einzelne möglichst unabhängige Arbeitsschritte aufteilen lässt.

   Diskutieren Sie: Welches der beiden Verfahren lässt sich besser parallelisieren?

Aufgabe 15 *(Speicherformate für schwach besetzte Matrizen)* (5 Punkte)

Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 7 & -18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Im Anhang des Skripts werden unterschiedliche Speicherformate für schwach besetzte Matrizen vorgestellt. Unter anderem das COO-Format (Coordinate Storage-Format), das CSR-Format (Compressed Row Storage-Format) und das CCR-Format (Compressed Column Storage-Format). Stellen Sie die Matrix A in allen drei Formaten dar.