Prof. Dr. Karsten Urban

Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger
Dipl.-Math. oec. Sebastian Kestler

Institut für Numerische Mathematik
Wintersemester 2012/13

Numerik 1

Matlab-Blatt 5

Abgabe wie auf dem ersten Matlab-Übungsblatt beschrieben
bis Dienstag, 15.01.2013, 24:00 Uhr per Email (s.u.)

Aufgabe 9 *(Gradienten- und konjugierte Gradienten-Verfahren)* (7+7+7 Punkte)
Ziel dieser Aufgabe ist es, das Gradienten- und das konjugierte Gradienten-Verfahren zu implementieren und zu vergleichen. Dazu sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrisch positiv definite (s.p.d.) Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $x^* \in \mathbb{R}^n$ die Lösung von $Ax = b$. Wir interessieren uns insbesondere für die Konvergenzraten

$$\|x^* - x^{(k)}\|_A \le \begin{cases} (\rho_{\mathrm{grad}})^k \|x^* - x^{(0)}\|_A, & \rho_{\mathrm{grad}} := \frac{\kappa-1}{\kappa+1}, \quad \text{(Gradienten-Verfahren)}, \\ 2(\rho_{\mathrm{cg}})^k \|x^* - x^{(0)}\|_A, & \rho_{\mathrm{cg}} := \frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}, \quad \text{(konjugierte Gradienten-Verfahren)}, \end{cases} \tag{1}$$

wobei $\kappa_2(A) = \|A\|_2\,\|A^{-1}\|_2 = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ ($\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$ bezeichnen den größten bzw. den kleinsten Eigenwert von A).

a) Implementieren Sie das Gradienten-Verfahren in einer Matlab-Funktion

`[xk,quots] = gradientmethod(A,b,x0,x_exact,N,eps)`,

wobei

- `A` $= A$ die Matrix des linearen Gleichungssystems,
- `b` $= b$ die rechte Seite des linearen Gleichungssystems,
- `x0` $= x^{(0)}$ der Startwert,
- `x_exact` $= x^*$ die exakte Lösung von $Ax = b$,
- `N` die maximale Anzahl der Iterationen des Gradienten-Verfahrens, und
- `eps` eine Zieltoleranz ist.

Dementsprechend ist `xk` $= x^{(k)}$ die k-te Iterierte des Gradienten-Verfahrens. Die Iteration soll abgebrochen werden, wenn $\|r^{(k)}\|_2 \le$ `eps` gilt. Im Vektor `quots` soll für die k-te Iteration an der k-ten Position folgender Wert gespeichert werden:

$$\texttt{quots(k)} = \frac{\|x^* - x^{(k)}\|_A}{\|x^* - x^{(k-1)}\|_A}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

b) Implementieren Sie das konjugierte Gradienten-Verfahren in einer Matlab-Funktion

`[xk,quots] = cgmethod(A,b,x0,x_exact,N,eps)`.

Im Vektor `quots` soll an der k-ten Position der Wert aus (2) gespeichert werden, wobei $x^{(k)}$ nun die k-te Iterierte des konjugierte Gradienten-Verfahren ist.

c) Plotten Sie `quots` für das Gradienten-Verfahren und für das konjugierte Gradienten-Verfahren analog zu Abbildung 4.3 im Skript. Berechnen Sie auch die Werte ρ_{grad} und ρ_{cg} aus (1) und vergleichen Sie diese Werte mit Ihren Ergebnissen in `quots`. Wie beurteilen Sie die beiden Verfahren hinsichtlich Ihrer Konvergenzeigenschaften? (Schreiben Sie das als Kommentar in Ihr Programm.)

Hinweis: Nutzen Sie die Matlab-Funktion `eig` zur numerischen Bestimmung von ρ_{grad} und ρ_{cg} aus Aufgabe c). Im Material zu diesem Übungsblatt finden Sie einen vorgefertigten Programmrumpf mit zwei Testbeispielen für die Matrix A, den Vektor b und den Startwert $x^{(0)}$.