Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math Markus Bantle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik 3
WS 12/13

# Übungsblatt 8

(Besprechung Mo. 17.12. 2012)

**Aufgabe 29** *(Lanczos Algorithmus)*

Gegeben sei eine $n^2 \times n^2$ Matrix $A$

$$A = \begin{pmatrix} T & -I & & & \\ -I & T & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -I & T \end{pmatrix},$$

wobei $I$ die $n \times n$ Einheitsmatrix ist und

$$T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Schreiben Sie eine Funktion `y = applyA(x)`, in der as Matrix-Vektor Produkt $y = Ax$ berechnet wird OHNE die Matrix $A$ aufzustellen. Achten Sie darauf, dass Sie möglichst geschickt, d.h. vektorisiert programmieren. Vergleichen Sie die Laufzeiten des Lanczos Algorithmus wenn Sie

- die Matrix $A$ als voll besetzte Matrix aufstellen
- die Matrix $A$ als dünn besetze Matrix aufstellen
- die Matrix $A$ nicht aufstellen und das Matrix Vektor Produkt mit `applyA` durchführen.

**Aufgabe 29** *(Eigenschaften der SVD)*

Sei $r = rank(A)$, $A = U\Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung, $U = [u_1, \dots, u_m] \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\Sigma = diag(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn $k < r$ und $A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$, dann gilt:

$$\min_{rank(B)=k} ||A - B||_F = ||A - A_k||_F,$$

d.h. $A_k$ ist die beste Rang-k Approximation von $A$. Hinweise:

- Zeigen Sie die Aussage für eine quadratische Matrix (d.h. $n = m$).
- $||A||_F$ bezeichnet die Frobenius-Norm von $A$ und es gilt:

$$||A||_F^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n |a_{i,k}|^2 = spur(A^H A).$$

- Zeigen Sie zunächst: $||A||_F^2 = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2$.
- Schreiben Sie eine beliebige Rang-k Matrix $B$ als $B = \sum_{i=1}^k x_i y_i^T$, wobei die $x_i$ eine Orthonormalbasis bilden (das geht o.B.d.A.) und zeigen Sie

$$||A - B||_F^2 \geq ||A||_F^2 - \sum_{i=1}^k ||Ax_i||_F^2.$$

- Folgern Sie aus dem vorigen Schritt die Behauptung, indem Sie zeigen, dass

$$\sum_{i=1}^k ||Ax_i||_F^2 \leq \sum_{i=1}^k \sigma_i^2.$$

(b) Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \ker(A) &= \operatorname{span}\{v_{r+1}, \dots, v_n\} \\ \operatorname{range}(A) &= \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_r\}. \end{aligned}$$