Prof. Dr. Stefan Funken
Katharina Becker-Steinberger
Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WS 2013/2014
Blatt 2
25.10.2013

Angewandte Numerik 2

Abgabetermin: Freitag 08.11.2013, **vor der Übung**

Dieses Übungsblatt hat aufgrund des Feiertags Allerheiligen eine Bearbeitungszeit von zwei Wochen. Nicht alle Aufgaben können mit dem Inhalt der Vorlesung vom 23.10.2013 bearbeitet werden.

Aufgabe 4 *(Programmieraufgabe, Euler-Verfahren)* (8 Punkte)

Bestimmen Sie mit Matlab für das Anfangswertproblem

$$y'(t) = y(t) + e^t, \quad y(0) = 1$$

auf dem Intervall $[0, 0.2]$ eine Näherungslösung nach dem expliziten Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k).$$

Wählen Sie als Schrittweite zunächst $h = \frac{1}{20}$ und lösen Sie ebenfalls für $h = \frac{1}{40}$. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung $y(t) = (t+1)e^t$.

Aufgabe 5 *(Programmieraufgabe, Einschrittverfahren: explizites Euler-Verfahren, Verfahren von Heun)* (10 Punkte)

Schreiben Sie ein Matlab-Programm zur numerischen Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = -200ty^2, \quad y(-1) = \frac{1}{101}$$

Verwenden Sie dazu die folgenden Einschrittverfahren mit konstanter Schrittweite h. Setze $n = 1/h$:

$$t_0 = -1, \quad y_0 = \frac{1}{101},$$
$$t_{j+1} = t_j + h, \quad y_{j+1} = y_j + h\phi(t_j, y_j, h), \quad j = 0, \dots, n-1$$

a) explizites Euler-Verfahren: $\phi(t, y, h) = f(t, y)$

b) Verfahren von Heun: $\phi(t, y, h) = 0.5\,(f(t, y) + f(t + h, y + hf(t, y)))$

Wählen Sie verschiedene konstante Schrittweiten h zwischen 10^{-1} und 10^{-4}. Tragen Sie in einer Grafik jeweils den Logarithmus des absoluten globalen Diskretisierungsfehlers $|y_n^n - y(0)|$ gegenüber dem Logarithmus der Schrittweite auf. Was besagt diese Grafik?

Hinweise:

- Berechnen Sie die exakte Lösung mit Trennung der Variablen.
- Zur Bezeichnung:
  Zu einer gegebenen Schrittweite h ergibt sich die Anzahl der Schritte im Zeitintervall $[-1, 0]$ durch $n = 1/h$. Den Näherungswert im k-ten Schritt des Einschrittverfahrens mit diesen Parametern h und n bezeichnen wir mit y_k^n.

Aufgabe 6 *(lokaler Diskretisierungsfehler, Konsistenzordnung)* (15 Punkte)

Zur Lösung der Anfangswertaufgabe $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$ betrachten wir die folgenden Einschrittverfahren zu einem äquidistanten Gitter mit der Schrittweite $h = (b - a)/n$:

a) Euler-Schritte mit Schrittweite h: $v_{j+1} = v_j + hf(t_j, v_j)$

b) Zwei Euler-Schritte mit halber Schrittweite:

$$w_{j+\frac{1}{2}} = w_j + \frac{h}{2} f(t_j, w_j), \quad w_{j+1} = w_{j+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f(t_j + \frac{h}{2}, w_{j+\frac{1}{2}})$$

c) Extrapoliertes Verfahren: $u_{j+1} = \alpha v_{j+1} + (1 - \alpha) w_{j+1}$

Bestimmen Sie jeweils den führenden Term des lokalen Diskretisierungsfehlers. Kann α so gewählt werden, dass der lokale Diskretisierungsfehler des extrapolierten Verfahrens von der Ordnung 3 ist?

Hinweise:

Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Senden Sie alle Files in einer email mit dem Betreff **Loesung-Blatt2** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de** (Abgabetermin jeweils wie beim Theorieteil). Drucken Sie zusätzlich allen Programmcode sowie die Ergebnisse aus und geben Sie diese vor der Übung ab. Der Source Code sollte strukturiert und, wenn nötig, dokumentiert sein.