Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WS 2013/2014
Blatt 5
22.11.2013

Angewandte Numerik 2

Abgabetermin: 29.11.2013, **vor der Übung**

Aufgabe 11 *(Newton-Interpolation)* (8 Punkte)

Gegeben seien äquidistante Stützstellen $t_k = t_0 + kh$. Bestimmen Sie zu $(n+1)$ gegeben Stützpunkten $(t_i, f_i), i = 0, \dots, n$ das Interpolationspolynom $I_f \in \mathbb{P}_n$ in Newton-Form

$$I_f(s) = \nabla^0 f_0 + \frac{1}{h^1}\nabla^1 f_1(s - t_0) + \cdots + \frac{1}{n!h^n}\nabla^n f_n(s - t_0)\cdots(s - t_{n-1}).$$

a) Schreiben Sie hierzu eine Matlab-Routine `d=divdiff(t0, h, f)`, die mit dividierten Differenzen die Koeffizienten $\nabla^0 f_0, \dots \nabla^n f_n$ des Newton-Polynoms zu den Daten $(t_i, f_i), i = 0, \dots, n$ liefert, d. h. die Rückwärtsdifferenzen.

b) Schreiben Sie eine Routine `f=newtonpolynom(t0,h,d,s)`, die das Newton-Polynom zu den Stützstellen t_j und den Koeffizienten $\nabla^0 f_0, \dots \nabla^n f_n$ mithilfe eines Horner-artigen Schemas im Punkt s auswertet.

Aufgabe 12 *(Mehrschrittverfahren in Rückwärtsdifferenzen Darstellung)* (10 Punkte)

Das Ziel ist es das Mehrschrittverfahren

$$y_{j+k} = y_{j+r-\ell} + h\sum_{i=0}^{r} \gamma_i^{(r,\ell)} \nabla^i f_{j+r} \tag{1}$$

zu implementieren.

a) Schreiben Sie hierzu eine Maple-Routine, welche die Koeffizienten

$$\gamma_i^{(r,\ell)} = (-1)^i \int_{-\ell}^{k-r} \binom{-s}{i}\, ds$$

mit

$$\binom{-s}{i} = \frac{-s(-s-1)(-s-2)\cdot(-s-(i-1))}{i!}$$

berechnet.

b) Schreiben Sie Matlab-Funktionen, in denen Sie die Verfahren aus Aufgabe 10 c), d.h. das Adams-Bahforth- und das Adams-Moulton-Verfahren in der Rückwärtsdifferenzen Darstellung (1) implementieren.

Hinweis: Sie können die Koeffizienten $\gamma_i^{(r,\ell)}$ auch ohne a) berechnen. Man kann einerseits die Formel

$$\sum_{j=0}^{i} \frac{\gamma_{i-j}^{(k-1,0)}}{j+1} = 1$$

zeigen, aus der sich die Koeffizienten rekursiv berechnen lassen und andererseits den Zusammenhang

$$\gamma_j^{(k,1)} = \gamma_j^{(k-1,0)} - \gamma_{j-1}^{(k-1,0)}.$$

Wenn Sie a) nicht bearbeitet haben, verwenden Sie diesen Hinweis.

c) Testen Sie diese Funktionen sowie die aus Aufgabenteil b), in dem Sie die Anfangswertaufgabe aus Aufgabe 10 d)

$$y' = -\frac{2xy^2}{x^2+1}, \quad y(0) = 2$$

lösen. Die Schrittweite sei hierbei $h = 0.1$. Die exakte Lösung ist übrigens

$$y(x) = \frac{1}{\ln(x^2+1) + 0.5}.$$

Verwenden Sie als Startwerte die exakte Lösung an den Gitterpunkten, d.h. $y_j = y(x_j)$ für $j = 0, \ldots, k-1$. Plotten Sie jeweils den Fehler gegen die exakte Lösung.

d) Vergleichen Sie ihre Mehrschrittverfahren von diesem Blatt mit denen vom Blatt 4 hinsichtlich der Vor- und Nachteile der jeweiligen Darstellungsformen.

e*) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion die das Nyström-Verfahren ($r = k-1 = 3, \ell = 1$) in der Darstellung (1) implementiert und eine weitere Funktion die das Milne-Simpson-Verfahren ($r = k = 3, \ell = 2$) ebenfalls in der Rückwärtsdifferenzen Darstellung (1) berechnet.

Hinweis: Die mit * gekennzeichnete Aufgabe ist eine Zusatzaufgabe.

Hinweise:

Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Senden Sie alle Files in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt5** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de** (Abgabetermin jeweils wie beim Theorieteil). Drucken Sie zusätzlich allen Programmcode sowie die Ergebnisse aus und geben Sie diese vor der Übung ab. Der Source Code sollte strukturiert und, wenn nötig, dokumentiert sein.