Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Andreas Bantle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Übungsblatt 10

(Besprechung Mo. 10.02.2014)

Aufgabe 20 *(Raviart-Thomas Element,* MATLAB*)*

Variationsformulierung:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f \in L^2(\Omega)$. Wir betrachten die Sattelpunkts-Formulierung des Poisson-Problems

$$\begin{aligned} \operatorname{div} p &= f && \text{in } \Omega \\ \nabla u + p &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

mit Variationsformulierung :
Suche $p \in \mathcal{X} := H(\operatorname{div}, \Omega) := \{q \in L^2(\Omega)^2 : \operatorname{div} q \in L^2(\Omega)\}$ und $u \in \mathcal{Y} := L^2(\Omega)$, sodass:

$$\begin{aligned} \int_\Omega q^T p\, dx + \int_\Omega u \ \operatorname{div} q\, dx &= 0 && \forall\, q \in H(\operatorname{div}, \Omega) \\ \int_\Omega v \ \operatorname{div} p\, dx &= \int_\Omega f\, v\, dx && \forall\, v \in L^2(\Omega). \end{aligned} \tag{2}$$

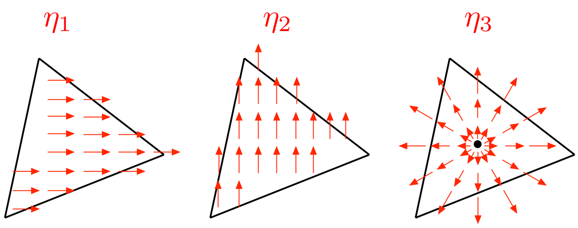
Diskretisierung:
Als diskreten Ansatz-Raum für $L^2(\Omega)$ wählen wir $\mathcal{Y}_h := \{v_h \in {}^2(\Omega) : v_h|_T \in \mathcal{P}_0(T),\ T \in \mathcal{T}_h\} \subset L^2(\Omega)$. Für den Raum $\mathcal{X}$ wählen wir das Raviart-Thomas Element:

$$\mathcal{X}_h := \left\{ q_h \in L^2(\Omega) : q_h|_T = \begin{pmatrix} a_T \\ b_T \end{pmatrix} + c_T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, a_T, b_T, c_T \in \mathbb{R},\ T \in \mathcal{T}_h,\ q_h^T n \text{ ist stetig an den inneren Kanten} \right\}.$$

Da es für die Implementierung aufwändig ist die Stetigkeitsbedingung an den Elementgrenzen zu erhalten, wird diese im Ansatzraum vernachlässigt und über eine Lagrange-Multiplikator realisiert. Das diskrete Problem lautet dann: Suche $p_h \in \mathcal{X}_h^* := \left\{ q_h \in L^2(\Omega) : q_h|_T = \begin{pmatrix} a_T \\ b_T \end{pmatrix} + c_T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, a_T, b_T, c_T \in \mathbb{R} \right\}$, $u_h \in \mathcal{Y}_h$ und $\lambda_h \in \mathcal{Y}_h$, sodass:

$$\begin{aligned} \int_\Omega q_h^T p_h\, dx + \int_\Omega u_h \ \operatorname{div} q_h\, dx + \int_{\Gamma_h} \lambda_h \lfloor q_h^T n \rfloor\, ds &= \int_\Gamma u_D\ q_h^T n\, ds && \forall\, q_h \in \mathcal{X}_h^* \\ \int_\Omega v_h \ \operatorname{div} p_h\, dx &= \int_\Omega f\, v_h\, dx && \forall\, v_h \in \mathcal{Y}_h \\ \int_{\Gamma_h} \mu_h \lfloor p_h^T n \rfloor\, ds &= 0 && \forall\, \mu_h \in \mathcal{Y}_h, \end{aligned} \tag{3}$$

wobei wir mit Γ_h alle inneren Kanten und mit $\lfloor \cdot \rfloor$ den Kantensprung bezeichnen.
Als Basisfunktionen für $\mathcal{X}_h^*$ wählen wir auf jedem Element die drei Funktionen $\eta_1^{(T)} := (1,0)^T$, $\eta_2^{(T)} := (0,1)^T$ und $\eta_3^{(T)} := (x - x_S, y - y_S)$, wobei $(x_S, y_S)^T$ den Schwerpunkt des Elements bezeichne:



Gleichung (3) lässt sich dann wie folgt als LGS schreiben:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{u} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Assemblierung:

Die Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3|\mathcal{T}_h| \times 3|\mathcal{T}_h|}$ und ist gegeben durch $\mathbf{B} = \operatorname{diag}\{B_i,\ i = 1,..,n_E\}$ mit

$$(B_i)_{j,k} := \int_{T_i} \eta_j^T \eta_k \, dx \qquad j,k = 1,..,3.$$

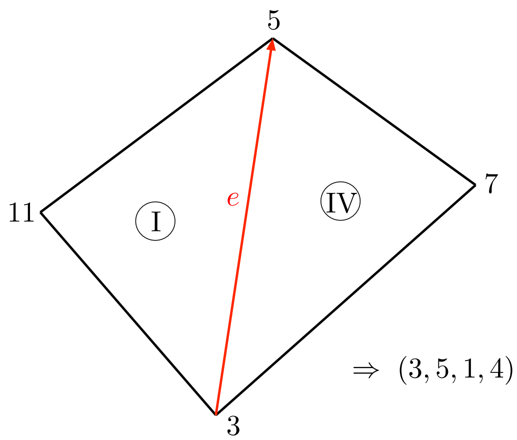
Die Matrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3|\mathcal{T}_h| \times |\mathcal{T}_h|}$ ist gegeben durch $\mathbf{C} = \operatorname{diag}\{C_i,\ i = 1,..,n_E\}$ mit

$$(C_i)_j := \int_{T_i} \operatorname{div}(\eta_j) \, dx \qquad j = 1,2,3.$$

Durch die Matrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{3|\mathcal{T}_h| \times n_I}$ werden die Kantensprünge berücksichtigt (n_I bezeichne dabei die Anzahl der inneren Kanten). Besitzt ein Element T_k die innere Kante E_j, dann ergeben sich die drei Einträge

$$(D_k)_j := \int_{E_j} \lfloor \eta_i^T n \rfloor \, dx \qquad i = 1,...,3.$$

Diese Teilmatrix wird in der globalen Matrix $\mathbf{D}$ an die Stelle $(3*(k-1)+1:3, j)$ gespeichert.
Für die Implementierung brauchen wir die Hilfsdatenstruktur `IntEdges`$\in \mathbb{R}^{n_I \times 4}$, die in den ersten beiden Spalten jeweils den Index des Anfangs- und Endpunktes der Kante enthält, die dritte und vierten Spalte enthalten jeweils die Elementnummern der beiden angrenzenden Elemente. Ein Beispiel zeigt folgende Abbildung:



Die Matrix $\mathbf{D}$ wird dann kantenweise assembliert. Da an jede innere Kanten zwei verschiedene Elemente mit jeweils drei Basisfunktionen $\eta_1,...,\eta_3$ angrenzen, ergeben sich also 6 Einträge pro innere Kante - die ersten drei Einträge für das erste Element und die letzten drei Einträge für das zweite Element.
Sei (x_a, y_a) der Anfangspunkt der Kante und $(x_S^{(i)}, y_S^{(i)})$ der Schwerpunkt des i-ten angrenzenden Elements $(i = 1,2)$. Der 6×1-Vektor ist dann gegeben durch

$$\begin{pmatrix} -e_2 \\ e_1 \\ h_1 \\ e_2 \\ -e_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

wobei e den Kantenvektor bezeichnet und $h_i = (x_a - x_S^{(i)}, y_a - y_S^{(i)}) \times e$.

Aufgaben:

(i) Zeigen Sie: $q_h^T n \equiv const$ auf den Elementkanten für $q_h \in \mathcal{X}_h^*$.

(ii) Zeigen Sie: Die Einträge der Teilmatrizen B_i sind gegeben durch

$$B_i = |T_i| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s}{36} \end{pmatrix}$$

mit $s = \|P_2 - P_1\|^2 + \|P_3 - P_2\|^2 + \|P_3 - P_1\|^2$.

(iii) Berechnen Sie die Einträge von C_i.

(iv) Laden Sie sich das Material von der Homepage. Stellen sie an den mit Kommentaren gekennzeichneten Stellen die Matrizen $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ auf (ohne `for`-Schleife!).

(v) Im Code wird die Matrix $\mathbf{D}$ kantenweise über eine `for`-Schleife assembliert. Modifizieren Sie den Code, sodass keine `for`-Schleife benötigt wird.

(vi) Testen Sie ihre Funktionen am Beispiel `Square`.